61.10 Análisis Matemático III A
Resolución de Finales
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

Martín E. Buchwald
Ezequiel Genender Peña
Nicolás Menzano Diaz
Pablo Musumeci
Federico R. Quevedo

Índice

Nota Importante:

- El criterio de Dirichlet esta presentado de una forma más entendible pero no es la oficial.

  La posta es: **Criterio de Dirichlet** Sean f una función continua con primitiva F acotada $\forall x \geq a$ y g una función decreciente con derivada primera continua $\forall x \geq a$. Si $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, entonces $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ converge.

  Doy un caso tipico de ejemplo: $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$
  En este caso tenemos $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.

  Se ve que la primitiva de $f(x)$ es acotada y que la derivada primera de $g(x)$ es continua y que dicha función vale 0 para $x \to \infty$.

- Los ejercicios de ecuaciones diferenciales resueltos por Laplace se encararon para $t > 0$ y $t < 0$ si no se aclaraba nada,pero no hay problema en considerar por defecto que hay que resolverlo solo para $t > 0$.

- Algunos ejercicios tienen mal el resultado, por haber hecho una cuenta mal, o como mucho un error mínimo en la resolución (como puede ser en el ejercicio 1 del final del 04/08/2012, que se aplica la pariedad pero se olvida hacerlo para el e^{-iwt}), pero en general esas son las formas de plantear los diversos ejercicios (obviamente no es la unica, y como se ve, en algunos ejercicios simplemente optamos por una, por gusto y/o comodidad)

1. Final 09/02/2012

1) a) Hallar el conjunto de valores de α y $\beta \in \mathbb{R}$ para los que puede asegurar que la integral $\int_0^{\infty} \frac{x^{\beta}}{x^{\alpha}+1}\cos(yx)dx$ converge independientemente de y.
b) Elija valores adecuados para β y α y calcule.

a) Vemos que la función:

$$f(x) = \frac{x^{\beta}}{x^{\alpha}+1}\cos(yx)$$

Es una función continua para todo x entre 0 e infinito. Analizamos la convergencia de la integral a partir de acotaciones:

$$\left|\int_0^{\infty} \frac{x^{\beta}}{x^{\alpha}+1}\cos(yx)dx\right| \leq \int_0^{\infty} \frac{|x^{\beta}|}{|x^{\alpha}+1|}|\cos(yx)||dx| \leq \int_0^{\infty} \frac{|x^{\beta}|}{|x^{\alpha}+1|}|dx|$$

Para que tal integral converja, el grado del polinomio del denominador debe ser mayor al del numerador, más 1:
$\text{gr}(x^{\alpha}+1) > \text{gr}(x^{\beta}) + 1 \Rightarrow \alpha > \beta + 1$
Como se puede ver, esto no depende del valor de y.

<u>Aclaración</u>: Para casos de Polinomios propiamente dichos, los grados de los polinomios deben diferir en 2, pero en este caso α y β son reales, por lo que, con cumplirse la diferencia sea mayor a 1 grado (no mayor o igual), se cumple la condición de convergencia (ver que si son valores naturales, el hecho de que la diferencia sea mayor a 1 implica que sea mayor o igual a 2).

b) Elijo $\beta = 0, \alpha = 2$
Cambio *'y'* por *'a'*, para no tener problemas de notación más adelante.

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx$$

Dado que se trata de una función par:

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx$$

Reemplazamos adecuadamente, planteando la integral en el espacio complejo:

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz \qquad (1)$$

Donde la curva dependerá de cuál convenga agarrar. Para que tal integral converja, es necesario que la exponencial esté acotada. Para esto, planteamos:
$|e^{iaz}| = |e^{iax-ay}| = |e^{iax}||e^{-ay}| = |e^{-ay}|$
Necesitamos entonces que: $ay \geq 0$
Tenemos tres casos: $(1)a > 0, (2)a < 0, (3)a = 0$. En sí la forma de tratarlos es la misma, y el análisis también (aunque la (3) es aún más sencilla) por lo que solo hacemos uno de manera más 'extensa':

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{x^2+1}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz = 2\pi i Res\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1}, i\right)$$

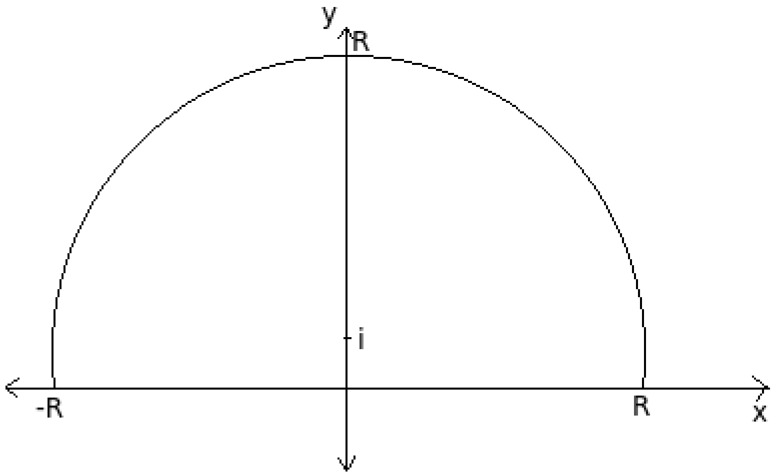
Analizamos la convergencia del segundo término:

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz\right|\leq\int_{C_R}\frac{|e^{iaz}|}{|z^2+1|}|dz|=\int_{C_R}\frac{|e^{iax}||e^{-ya}|}{|z^2+1|}|dz|\leq\int_{C_R}\frac{1}{|z^2+1|}|dz|\leq\frac{\pi R}{R^2-1}\xrightarrow{R\to\infty}0$$

El e^{iax} tiene módulo 1 y e^{-ay} queda acotado por 1, dado que $a>0$ e $y>0$.Por lo tanto:

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{iax}}{x^2+1}dx+\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{1+x^2}dz=2\pi i Res\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1},i\right)$$

Para $a>0\to y\geq 0$, por lo que la singularidad encerrada sera $z_0=i$



$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+1}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x^2+1}dx=2\pi i\mathrm{Res}(\frac{e^{iaz}}{z^2+1},i)$
$\mathrm{Res}(\frac{e^{iaz}}{z^2+1},i)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{iaz}/(z+i)}{z-i}dz=(\frac{e^{iaz}}{z+i})_{z=i}=\frac{1}{2ie^a}$
$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{e^a}+i*0$

$$\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2e^a}$$

Si $a<0$, entonces para que se cumpla que la integral converja, es necesario que $y\leqslant 0$, por lo que esta vez la singularidad encerrada será $z_0=-i$. El análisis anterior sigue valiendo, pero el residuo dará 'distinto'. En particular, dará con el signo negativo, pero hay que tener en cuenta que, como recorremos positivamente la curva, estaremos calculando la integral desde R a -R, por lo que, para volver al caso que nos interesa, volvemos a cambiar el signo. El valor del residuo además cambia en la exponencial, pero dado que el valor de a es menor a 0, podemos notar para ambos casos:
$I(a)=\frac{\pi}{2e^{|a|}}$

Si $a=0$, la integral es directamente *otra*, pues el coseno *desaparece*. El cálculo del residuo es similar (sacando la exponencial), y el análisis anterior sigue valiendo. En particular, el residuo da como resultado $\frac{1}{2i}$, por lo que el resultado dará el mismo valor que al especializar la expresión anterior con $a=0$.

Finalmente:

$$I(a)=\frac{\pi}{2e^{|a|}}$$

2) Para la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \pi \\ m(x) & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

a) Defina *m(x)* de modo que el desarrollo en serie exponencial de *f(x)* en el intervalo $[0; 2\pi]$ sea igual al de *x* en el intervalo $[0; \pi]$ y obtenga dicho desarrollo.

b) Defina *m(x)* de modo que se pueda asegurar que si se deriva el desarrollo en serie trigonométrico de Foruier de *f(x)* término a término, la nueva serie obtenida converge puntualmente a la derivada de *f(x)*. Escriba la fórmula que permite calcular los coeficientes pero no haga la cuenta.

c) Defina *m(x)* de modo que si en la serie se reemplaza *x* por π, la serie converja puntualmente a $\frac{1}{2}$.

d) Explique que es la convergencia cuadrática de una serie de funciones y diga porqué se puede asegurar que la serie hallada en a) converge cuadráticamente a *f(x)* en $[0; 2\pi]$.

a) Bueno, resulta que el sub-ejercicio más dificil es justamente el primero. Mala suerte. Empezamos a plantear cómo es cada una de las Series, porque hay que tener en cuenta que el período de cada una no es el mismo. Entonces:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \tag{2}$$

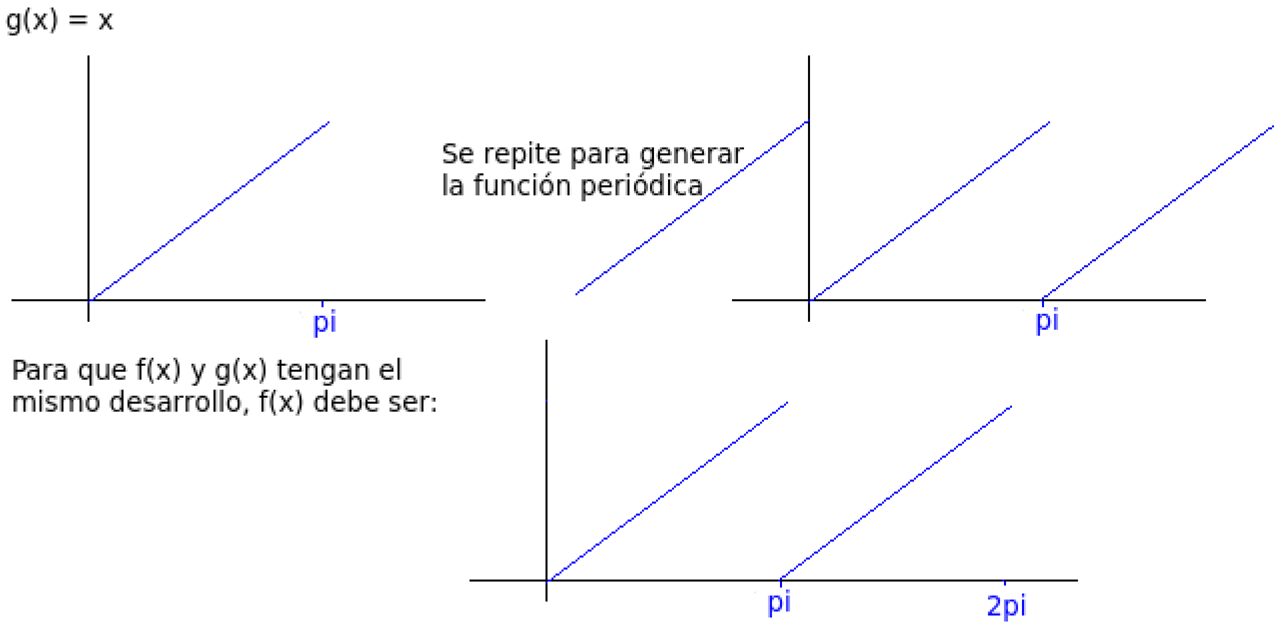
$$g(x) = x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2inx}$$

Conociendo como se calculan los coeficientes de la serie exponencial:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T h(x)\overline{e^{i\frac{2\pi}{T}nx}} dx = \frac{1}{T} \int_0^T h(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} dx \tag{3}$$

Siendo T el período (la integral debe calcularse en un período, no necesariamente de 0 a T), y h la función a calcularle los coeficientes.

Bueno, como nos piden que los desarrollos tienen que ser iguales. Para esto, hay que tener en cuenta el concepto de <u>Unicidad de la Serie de Fourier</u>: en el concepto del producto interno que estamos tratando, dos funciones que tiene el mismo desarrollo en serie de Fourier son funciones iguales (no significa que sean idénticas, porque por el P.I. que usamos, que es una integral, $\frac{x^2}{x} = x$, como ejemplo). Ahora bien, ese concepto es muy lindo pero se aplica a funciones que están definidas en un mismo período, sino se complica decir este tipo de cosas. Ahora, si decimos que la función x la redefinimos para que esté en el intervalo $[0; 2\pi]$ (teniendo en cuenta que debe repetirse), podríamos aplicar el concepto. Muestro un dibujo:



Ahí quedó un poco más claro. Entonces, ya casi está resuelto el ejercicio. Queda más o menos claro que $m(x)$ debe ser esa segunda recta de ahí. Entonces:

$$m(x) = x - \pi$$

Con esta *m(x)* los coeficientes quedan iguales. Paso a calcularlos, pero dado que los coeficientes serán los mismos en un caso y en otro, me la juego por el lado sencillo y calculo para la funcion *g(x)* $= x$ en el intervalo $[0; \pi]$:

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xe^{-2inx}dx = \frac{1}{\pi}(\frac{e^{-2inx}}{(-2in)^2}(-2inx - 1))|_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi n^2}(e^{-2inx}(2inx + 1))|_0^{\pi}$$

$$C_n = \frac{1}{4\pi n^2}(e^{-2\pi in}(2in\pi + 1) - 1) = \frac{1}{4\pi n^2}((-1)^n(2in\pi + 1) - 1)$$

No veo una forma de dejar mejor expresado eso, así que simplemente lo dejo como está.

ACLARACIÓN: Luego de consultar con Mario (Cachile), es posible que al enunciado le falte una coma o algo por el estilo. Dice que para él, el ejercicio quería decir que el desarrollo entre 0 y π tenían que ser iguales, y para esto, en teoría cualquier $m(x)$ podría ser usada, pero agregó que para tener cuidado, es conveniente que $m(\pi) = 0$ y $m(2\pi) = \pi$, más que nada por el tema de convergencia puntual, para que ambos desarrollos sean iguales (aunque técnicamente, si calculamos el desarrollo para $f(x)$ entre 0 y π, en ningún momento va a aparecer la $m(x)$. Igualmente dijo que lo pongamos, porque sino va a estar convergiendo a otra cosa que a $f(x)$. Por lo tanto, la solución dada es solución de esto también. Además dijo que si el enunciado pide lo que asumimos antes, el ejercicio estaba "bien resuelto" (no se fijó cómo daba, sino que le explicamos el criterio usado y dijo que otra no quedaba, pero le resultaba demasiado raro comparar desarrollos que no estén dentro del mismo intervalo).

b) Queremos que la derivada sea continua, particularmente en $x = \pi$ y que $f'(0) = f'(\pi)$, pues sino no convergerá puntualmente al valor que corresponde. Además, para que todo tenga

sentido, la función tiene que ser derivable, por lo que es necesario que sea continua en todo los puntos del intervalo $[0; 2\pi]$.
Dado que:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ m'(x) & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Necesitamos entonces que:

$$\lim_{x \to \pi^+} m'(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 2\pi^-} m'(x) = 1$$

Podríamos buscar una infinidad de funciones que cumplieran con ello. Para elegir una a mano, tenemos que tener en cuenta que la función debe valer π en $x = \pi$ y 0 en $x = 2\pi$, pero al mismo tiempo, la función es creciente en ambos puntos, por lo que tenemos que elgir una función que crezca, decaiga y vuelva a crecer.
Aclaración: Antes había una respuesta pero no cumplia con que sea continua para $x = 2\pi$, por lo tanto, se borró la respuesta, pero la idea sería esa.

Planteamos el cálculo de los coeficientes:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \tag{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(nx) dx \tag{5}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx \tag{6}$$

c) Por el **teorema** de Dirichlet (no lo dijeron en clase, pero buscando encontré que es de él), la serie de Fourier converge puntualmente a:

$$\frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2} \tag{7}$$

Sabiendo que $f^-(\pi) = \pi$:

$$\frac{f^+(\pi) + \pi}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m^+(\pi) + \pi}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m^+(\pi) = 1 - \pi$$

Simplemente defino $m(x) = 1 - \pi$ que cumple con lo pedido. Si esto parece demasiado trivial, simplemente definimos $m(x) = 1 - x$ y también sigue valiendo. Obviamente hay infinitas soluciones, pero con una alcanza :P.

d) Aquí comienza el gran chamuyo gran: La convergencia cuadrática está definida como:

$$\int_0^T \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right) \right|^2 dx \tag{8}$$

En particular, cuando N tiende a infinito, este *error* tiende a 0. Esto se debe a que, a mayor cantidad de términos calculados, más se *"pega"* la serie a la función verdadera, haciendo que el

área encerrada entre ambas se vaya anulando. Esto nos sirve, pues en la práctica a veces no es posible trabajar con una serie infinita, y necesitamos saber cuánto error estaremos comentiendo al calcular hasta el N-ésimo término.
Podemos afirmar que la Serie de Fourier encontrada en a) converge cuadráticamente a $f(x)$, pues la serie es infinita, y la función fue descompuesta en vectores de una base ortogonal del espacio de funciones (en el intervalo $[0;2\pi]$ con el producto interno canónico para las funciones).
TODA serie de Fourier, por definición, converge cuadráticamente a $f(x)$, pues converge puntualmente a la función en donde ésta sea continua, y a la semisuma de los límites laterales en donde no, pero como estas son discontinuidades de salto puntuales, al hacer la integral mencionada allí, no se tiene en cuenta.

3) Resuelva la ecuación del calor para una varilla metálica lateralmente aisalada ($\boldsymbol{k = 1}$) ubicada en el eje $\boldsymbol{x}$ si sus extremos están a temperaturas $T(0,t) = 0°C$ y $T(2\pi, t) = 1°C$ y la temperatura incial de la barra es la función $f(x)$ del ejercicio 2)b). (Deje expresado el cálculo de los coeficientes de la serie obtenida).

Recordamos la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{9}$$

Planteo:

$$T(x,t) = w(x) + \delta(x,t)$$

Siendo $\delta(x,t)$ el caso homogéneo.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \to w \text{ es funcion lineal}$$

$$w(x) = Ax + B; w(0) = 0 \to B = 0; w(2\pi) = 1 \to B = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow w(x) = \frac{x}{2\pi}$$

Ahora planteamos para el caso homogéneo: $\delta(x,t) / \frac{\partial \delta}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}$
$\delta(0,t) = 0; \delta(2\pi, t) = 0; \delta(x,0) = f(x) - w(x)$

Planteo, como siempre hacemos:

$$\delta(x,y) = \chi(x)\tau(t) \tag{10}$$

Por lo tanto, reemplzamos en la ecuación diferencial:

$$\chi''(x)\tau(t) = \chi(x)\tau'(t)$$

Dividimos miembro a miembro por $\delta(x,t)$:

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{\tau'(t)}{\tau(t)}$$

Dado que de un lado solo depende de x y del otro solo de t, la igualdad no puede dependender de ninguna de las dos (pues si depende de x, del lado que depende de t hay problemas). Elegimos $-\lambda^2$ ya que si eligieramos λ^2 la solución resultante no satisfaceria las condiciones de contorno para valores reales de λ. Por lo tanto:

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = -\lambda^2$$

Quedándonos dos ecuaciones diferenciales de una sola variable:

$$\begin{cases} \frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = -\lambda^2 \to \chi''(x) + \lambda^2\chi(x) = 0 \Rightarrow \chi(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)(A, B \in \mathbb{R}) \\ \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = -\lambda^2 \to \tau'(t) + \lambda^2\tau(t) = 0 \Rightarrow \tau(t) = Ce^{-\lambda^2 t}(C \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Ahora planteamos las condiciones de borde:

$$\delta(0,t) = 0 \to \chi(0) = 0 \to A = 0 \Rightarrow \chi(x) = B\sin(\lambda x)$$

$$\delta(2\pi,t) = 0 \to \chi(2\pi) = 0 \to B\sin(\lambda 2\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n}{2}(n \in \mathbb{N})$$

Ahora planteamos la condición inicial:

$$\delta(x,t) = B'\sin\left(\frac{n}{2}x\right)e^{-\frac{n^2}{4}t}$$

$$\delta(x,0) = f(x) - w(x) \to B'\sin\left(\frac{n}{2}x\right) = f(x) - w(x) = g(x)$$

Dado que una simple función senoidal no puede ser igual a esa función, necesitamos plantear una Serie infinita, que será la Serie de Fourier (como extensión impar, para que sea de senos). Como justamente será una suma de Soluciones a la ecuación diferencial, se seguirá cumpliendo esa ecuación (por el principio de superposición) y además se seguirán cumpliendo las condiciones de borde. Entonces:

$$\delta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right)e^{-\frac{n^2}{4}t}$$

$$\delta(x,0) = f(x) - w(x) \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right) = f(x) - w(x) = g(x)$$

Donde:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x) - w(x))\sin\left(\frac{n}{2}x\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(x - \frac{x}{2\pi}\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{1}{2\pi}\right)\int_0^{2\pi} x\sin\left(\frac{n}{2}x\right)dx$$

Finalmente:

$$T(x,t) = \delta(x,t) + w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right)e^{-\frac{n^2}{4}t} + \frac{x}{2\pi}$$

Siendo b_n calculados como es mencionado justo arriba.

Resolución utilizando Transformada de Fourier:
Vuelvo a separar en solución diferencial (homogénea) y particular:

$$T(x,t) = \delta(x,t) + h(x)$$

Cambio la letra de la solución particular para no tener problemas con el uso de la w luego. Claramente la solución particular sigue siendo la misma.

Planteo:

$$\mathcal{F}_x\{\delta\} = \Delta(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,t) e^{-i\omega x} dx \tag{11}$$

Aplicamos la transformada a la ecuación diferencial (pues es una operación lineal):

$$-\omega^2 \Delta(\omega, t) = \Delta'_t(\omega, t)$$

Las condiciones de borde se mantienen igual: $\Delta(0,t) = 0; \Delta(2\pi, t) = 0$, pues si reemplazamos con cualquiera de esos dos valores en (11), δ se vuelve 0, y lo hará por ende la integral.
La condicion inicial cambia a: $\Delta(\omega, 0) = \mathcal{F}_x\{f - h\} = F(\omega) - H(\omega)$
Resolvemos:

$$\Delta'_t(\omega, t) + \omega^2 \Delta(\omega, t) = 0 \Rightarrow \Delta(\omega, t) = A(\omega) e^{-\omega^2 t}$$

$$\Delta(\omega, 0) = F(\omega) - H(\omega) = A(\omega)$$

$$\Rightarrow T(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{(F(\omega) - H(\omega)) e^{-\omega^2 t}\} = [f(x) - h(x)] * g(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - h(x)] g(x - u, t) du$$

Con $g(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-\omega^2 t}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega$

4) a) Defina producto de convolución de dos funciones *x(t)* e *y(t)* definidas en $(-\infty; +\infty)$. Escriba la expresión de dicho producto $x(t) = y(t) = 0 \forall t < 0$ (funciones causales).

b) Estableciendo hipótesis necesarias, demuestra la propiedad que permite obtener la transformada de Laplace del producto de convolución de dos funciones causales en función de las transformadas de Laplace de cada una de dichas funciones.

c) Sabiendo que $x(0) = y(0) = 0$ y que: $\begin{cases} y'(t) + \int_0^t x(\tau) y(t-\tau) d\tau = x(t) \\ x'(t) + 2x(t) = H(t) \end{cases}$
Obtener $x(t)$ e $y(t)$. $H(t)$: función de Heavside.

a) Definimos el producto $(x * y)$:

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-u) du \tag{12}$$

En particular, si $x(t) = y(t) = 0 \forall t < 0$:

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-u) du = \int_{-\infty}^{0} x(u) y(t-u) du + \int_{0}^{\infty} x(u) y(t-u) du$$

El primer término vale 0 pues $x(u) = 0$ para toda esa integral.

$$(x * y)(t) = \int_0^\infty x(u)y(t-u)du = \int_0^t x(u)y(t-u)du + \int_t^\infty x(u)y(t-u)du$$

El segundo término vale 0, pues $u > t$ por lo que $t - u < 0 \to y(t - u < 0) = 0$.

Finalmente:

$$(x * y)(t) = \int_0^t x(u)y(t-u)du \tag{13}$$

b)

$$\mathcal{L}\{x * y\} = \int_0^\infty (x * y)e^{-st}dt = \int_0^\infty (\int_0^t x(u)y(t-u)du)e^{-st}dt$$

Planteamos un pequeño cambio de variables:
$h = t - u; z = u$. (ver que el Jackoviano es 1)

Como $t \in (0; \infty)$ y $u \in (0; t)$, si $u = 0 \to z = 0$ y $h \in (0; \infty)$. Si $t = u \to h = 0, z \in (0; \infty)$. Entonces, la integral queda:

$$\mathcal{L}\{x * y\} = \int_0^\infty \int_0^\infty x(z)y(h)e^{-s(h+z)}dhdz = \int_0^\infty x(z)e^{-sz}dz \int_0^\infty y(h)e^{-sh}dh = \mathcal{L}\{x\}\mathcal{L}\{y\}$$

Finalmente:

$$\mathcal{L}\{x * y\} = \mathcal{L}\{x\}\mathcal{L}\{y\} \tag{14}$$

c)$\begin{cases} y'(t) + \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau = y'(t) + (x * y)(t) = x(t) \\ x'(t) + 2x(t) = H(t) \end{cases}$

Aplico la transformada de Laplace miembro a miembro (lo puedo hacer porque es una operación lineal).

$\begin{cases} \mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{(x * y)(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\} \\ \mathcal{L}\{x'(t)\} + \mathcal{L}\{2x(t)\} = \mathcal{L}\{1\} \end{cases}$

$\begin{cases} s\mathcal{Y}(s) + \mathcal{Y}(s)\mathcal{X}(s) = \mathcal{X}(s) \\ s\mathcal{X}(s) + 2\mathcal{X} = \frac{1}{s} \end{cases}$

Resolvemos para la segunda ecuación, que es más sencilla:

$$\mathcal{X}(s+2) = \frac{1}{s} \to \mathcal{X}(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$s\mathcal{Y}(s) + \mathcal{Y}(s)\mathcal{X}(s) = \mathcal{X}(s) \to \mathcal{Y}(s) = \frac{\mathcal{X}(s)}{s + \mathcal{X}(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 1}$$

Dado que ese denominador tiene raices complejas, habría que hacer algún retoque para poder transformalo en la transformada de un seno o un coseno, pero para eso necesitamos conocer la raiz real. Como no disponemos de calculadora, y además la raiz no es precisamente linda (no es ni 1 ni -1, así que no es racional). Por lo tanto dejamos expresado el resultado:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2} \\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3+s^2+1}\} \end{cases}$$

5) La función de dos variables reales: $F(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + 2y$ es la parte real del potencial complejo de un fluido ideal. Hallar dicho potencial y la expresión del campo vectorial de velocidades asociado a él.

$$F(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + 2y$$
$$G(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y) = F(x,y) + i\psi(x,y)$$

Viendo un poco resulta que:

$$F(x,y) = \mathrm{Re}(\frac{1}{z}) + \mathrm{Re}(-e^{z^2}) + \mathrm{Re}(-2iz)$$

Por lo tanto:

$$G(z) = \frac{1}{z} - e^{z^2} - 2iz$$

(En particular, se puede ver que: $\psi(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} - e^{x^2-y^2}\sin(2xy) - 2x$).

No sé que quiere decir con eso de çampo vectorial de velocidades". Creo que se refiere a la función cuyo potencial complejo es $G(z)$. Si es esto:

$$f(z) = \overline{G'(z)} = \overline{\frac{-1}{z^2}} - \overline{2ze^{z^2}} - \overline{2i}$$

Como a la derivada de $G(z)$ la podemos escribir en función de las derivadas parciales de *F(x,y)*, será más fácil verlo así:

$$G'(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

Entonces:

$$G'(z) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) + 2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy) -$$
$$i[\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} + 2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy) + 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy) + 2]$$

Por lo tanto:

$$f(x,y) = \overline{G'(z)} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) + 2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy) +$$
$$i[\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} + 2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy) + 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy) + 2]$$

Escrito en un plano (x,y), con versores $\widehat{i} = (1,0); \widehat{j} = (0,1)$ (para que quede escrito como un campo vectorial...):

$$f(x,y) = [\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) + 2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy)]\widehat{i}$$
$$+[\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} + 2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy) + 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy) + 2]\widehat{j}$$

2. Final 04/07/2012

1) Suponiendo conocida la Transformada de Fourier de $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$, calcule en función de ella la Transformada de Fourier de $\frac{2t+3}{t^2-2t+5}$.

Definimos:

$$\mathcal{F}\{\frac{1}{t^2+1}\} = F(\omega)$$

Comenzamos dejando un poco más linda la función a transformar:

$$g(t) = \frac{2t+3}{t^2-2t+5} = \frac{2t+3}{(t-1)^2+4} = \frac{2t}{(t-1)^2+4} + \frac{3}{(t-1)^2+4} = h(t) + j(t)$$

Donde h y j son el primer y segundo término, respectivamente. Trabajamos primero con *j(t)*:

$$\mathcal{F}\{j(t)\} = \mathcal{F}\{\frac{3}{4}\frac{1}{(\frac{t-1}{2})^2+1}\} = \frac{3}{4}\mathcal{F}\{\frac{1}{(\frac{t}{2}-\frac{1}{2})^2+1} = \frac{3}{2}F(2\omega)e^{i\frac{\omega}{2}}$$

Ahora deberíamos trabajar sobre la otra parte. Para esto, es necesario ver la propiedad de la derivación en frecuencia de la trasnformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{(-it)^n f(t)\} = \frac{\partial^n F(\omega)}{\partial \omega^n} \tag{15}$$

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{\frac{2t}{(t-1)^2+4}\} = \mathcal{F}\{\frac{t}{2}\frac{1}{(\frac{t}{2}-\frac{1}{2})^2+1}\} = \mathcal{F}\{\frac{i}{2}(-it)\frac{1}{(\frac{t}{2}-\frac{1}{2})^2+1}\} = \frac{i}{2}\mathcal{F}\{(-it)f\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)\}$$

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = i\frac{dF}{d\omega}(2\omega)e^{i\frac{\omega}{2}}$$

Finalmente:

$$\mathcal{F}\{\frac{2t+3}{t^2-2t+5}\} = \frac{3}{2}F(2\omega)e^{i\frac{\omega}{2}} + i\frac{dF}{d\omega}(2\omega)e^{i\frac{\omega}{2}}$$

2) a) Hallar el D.S.F de senos y el D.S.F de cosenos de $f(x) = x(\pi - x)$ con $0 < x < \pi$.
b) Usar el punto a) para mostrar que:
1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

a) Desarrollo en Senos:

Debemos hacer una extensión impar de la función $f(x)$. Por lo tanto a_0 y a_n valen 0.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

En nuestro caso, como la función va de 0 a π, $L = \pi$.

Por lo tanto:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Calculamos b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-x^2+\pi x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(-\int_0^{\pi} x^2\sin(nx)dx + \pi\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx\right)$$

Tenemos que usar fucking integración por partes, para colmo 3 veces, a no ser que nos den la ayudita bien en el final, nos acordemos la formula o la tengamos macheteada (?)...

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(-\left(\frac{2x}{n^2}\sin(nx) + \left(\frac{2}{n^3}-\frac{x^2}{n}\right)\cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi} + \pi\left(\frac{\sin(nx)}{n^2}-\frac{x\cos(nx)}{n}\right)\Big|_0^{\pi}\right)$$

Si recordamos, $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0$ entonces se nos simplifican algunas cosas:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(-\left(\left(\frac{2}{n^3}-\frac{x^2}{n}\right)\cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi} + \pi\left(-\frac{x\cos(nx)}{n}\right)\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(-\left(\frac{2}{n^3}\cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi} - \left(\frac{x^2}{n}cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi} + \pi\left(-\frac{xcos(nx)}{n}\right)\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{n^3}((-1)^n-1)\right)$$

$$b_n = -\frac{4}{\pi n^3}((-1)^n-1)$$

Viendo ese resultado, vemos que $b_n \neq 0$ si n es IMPAR, dando $((-1)^n-1) = -2$ Entonces:

$$b_n = \frac{8}{\pi(2n-1)^3}$$

Finalmente, el desarrollo en serie nos queda:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2n-1)^3}\sin((2n-1)x)$$

Desarollo en Cosenos:

Y como son rompebolas, tambien nos piden este... de nuevo son cuentas similares, otras tres veces hacer integración por partes pero ahora para el coseno... O sea, unos putos. Como tampoco da hacer de nuevo todo lo anterior, voy a saltearme varios pasos, pero el procedimiento es exactamente el mismo.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -x^2 + \pi x dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-x^2 + \pi x) \cos(nx) dx$$

Resolviendo...

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}$$

Para a_n tras integrar por partes o usando una tabla magica (?):

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(- \left(\frac{2x}{n^2} \cos(nx) + \frac{x \sin(nx)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} + \pi \left(\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \sin(nx)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$a_n = -\frac{4}{n^2}(-1)^n + \frac{2}{n^2}((-1)^n - 1)$$

$$a_n = \frac{2}{n^2}(-2(-1)^n + (-1)^n - 1)$$

$$a_n = \frac{2}{n^2}(-(-1)^n - 1)$$

Aca vemos que n tiene que ser PAR para que $a_n \neq 0$. Si ponemos n par, $(-(-1)^n - 1) = -2$

$$a_n = \frac{2}{(2n)^2}(-2)$$

$$a_n = -\frac{1}{n^2}$$

Finalmente, la serie de senos nos queda:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2nx)$$

b) Ahora nos piden calcular unas fucking series. Ojala hayamos resuelto bien el punto anterior, porque sino nos la vamos a querer cortar.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Esta se ve claramente que tenemos que usar la de cosenos, por la forma de la serie.

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2}\cos(2nx)$$

Viendola, tenemos que sacarnos de encima el coseno ese, que nos de 1. Esto pasa si elejimos $x = 0$:

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 1$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Usamos la misma de antes:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2}\cos(2nx)$$

Viendola y pensando un toque, tenemos que sacarnos de encima el coseno ese, que nos de $(-1)^n$. Esto pasa si elejimos $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2}(-1)^n$$

Acordandose que $-(-1)^n = (-1)^{n-1}$...

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Tuvimos suerte, la serie de cosenos la calculamos bien y nos podemos sentir grosos (?)

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

Usamos la serie de senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^3}\sin((2n-1)x)$$

Viendola y pensando un toque, tenemos que sacarnos de encima el seno ese, que nos de $-(-1)^n$. Esto pasa si elejimos $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^3}(-(-1)^n)$$

Acordandose que $-(-1)^n = (-1)^{n-1}$...

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\pi(2n-1)^3}$$

Y listo ahi queda todo probado y podemos asegurar que luego de tanto esfuerzo en calcular 6 integrales por partes y encima no pifiarle, tenemos este ejercicio bien. Y ahora le tenemos que meter pilas, porque hay que ver si llegamos con la hora (?).

3) En una varilla metálica ($k = 1$) de longitud π ubicada en el eje x el calor se transmite por sus extremos e intercambia calor con el medio ambiente según la ecuación diferencial: $u'_t(x,t) = u''_{xx} - hu(x,t)$, donde $h > 0$. Sus extremos están a temperaturas fijas, $0 \circ C$ y $1 \circ C$ para los extremos izquierdo y derecho respectivamente y la temperatura inicial de la barra es la función $f(x)$ del ejercicio 2)a). Halle la distribución de tempratura $u(x,t)$ en la barra. (Deje expresado el cálculo de los coeficientes de la serie obtenida).

Planteamos la separación del caso diferencial (transitorio) del estacionario:

$$u(x,t) = \delta(x,t) + w(x)$$

Donde ambas funciones cumplen con la ecuación diferencial, y además debe cumplirse que: $\delta(0,t) = 0; \delta(\pi,t) = 0; \delta(x,0) = f(x) - w(x); w(0) = 0; w(\pi) = 1$
Vemos primero cómo debe ser *w(x)*:

$$w''_{xx}(x) - hw(x) = w'_t = 0 \to w(x) = A\cosh(\sqrt{h}x) + B\sinh(\sqrt{h}x)$$

Como $w(0) = 0 \to A = 0; w(\pi) = 1 \to B = \frac{1}{\sinh(\sqrt{h}\pi)}$
Entonces:

$$w(x) = \frac{\sinh(\sqrt{h}x)}{\sinh(\sqrt{h}\pi)}$$

Ahora vamos con la solución transitoria:

$$\delta'_t(x,t) = \delta''_{xx} - h\delta$$

Planteamos $\delta = \chi(x)\tau(t)$:

$$\tau'(t)\chi(x) = \tau(t)\chi''(x) - h\tau(t)\chi(x)$$

Dividimos miembro a miembro con $\delta(x,t)$:

$$\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = \frac{\chi''(x)}{\chi(x)} - h = -\lambda^2$$

Separamos cada caso, el mismo verso que en el final anterior para decir porqué eso es igual a una constante. Para $\tau(t)$:

$$\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = -\lambda^2 \to \tau(t) = Ae^{-\lambda^2 t}$$

Ahora vamos con $\chi(x)$, que puede tener algunas complicaciones:

$$\chi''(x) + (\lambda^2 - h)\chi = 0$$

Podríamos decir que hay tres casos ($h < \lambda^2; h = \lambda^2; h > \lambda^2$), pero es mucho más sencillo decir directamente que $\lambda^2 > h$ y listo. Entonces:

$$\chi(x) = B\cos(\sqrt{\lambda^2 - h}x) + C\sin(\sqrt{\lambda^2 - h}x)$$

Como $\delta(0,t) = 0 \to \chi(0) = 0 \to B = 0$
Como $\delta(\pi,t) = 0 \to \chi(\pi) = 0 \to C\sin(\sqrt{\lambda^2 - h}\pi) = 0 \to \sqrt{\lambda^2 - h}\pi = n\pi (n \in \mathbb{N}) \to \lambda = \sqrt{n^2 + h}$

Por lo tanto, la función $\delta(x,t)$ nos queda:

$$\delta(x,t) = A'\sin(nx)e^{-(n^2+h)t} = A'\sin(nx)e^{-n^2t}e^{-ht}$$

(Si, increíble que haya desaparecido esa cosa horrible adentro del seno)
Vemos la condición inicial:

$$\delta(x,0) = f(x) - w(x) = g(x) = A'\sin(nx)$$

Como claramente un sólo seno no serviría, aprovechando el principio de superposición aplicamos como antes (final anterior):

$$\delta(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Siendo esta la extensión impar a *g(x)* en el intervalo $[0;\pi]$, por lo que quedará:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(nx)dx$$

Finalmente:

$$u(x,t) = \delta(x,t) + w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)e^{-n^2t}e^{-ht} + \frac{\sinh(\sqrt{h}x)}{\sinh(\sqrt{h}\pi)}$$

(Con $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(nx)dx$ y $g(x) = x(\pi - x) - \frac{\sinh(\sqrt{h}x)}{\sinh(\sqrt{h}\pi)}$)

4) a) Defina producto de convolución de dos funciones *x(t)* e *y(t)* definidas en $(-\infty;+\infty)$. Escriba la expresión de dicho producto si $x(t) = y(t) = 0 \forall t < 0$ (funciones causales).

b) Estableciendo hipótesis necesarias, demuestre la propiedad que permite obtener la transformada de Laplace del producto de convolución de dos funciones causales en función de las transformadas de Laplace de cada una de dichas funciones.

c) Sabiendo que $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$ y que $\begin{cases} y''(t) + \int_0^t y(\tau)x(t-\tau)d\tau = x(t) \\ x'(t) + 2x(t)0H(t) \end{cases}$
Obtener *x(t)* y explique cómo obtendría la antitransformada *y(t)*. *H(t)*: función de

Heavside.

Los puntos a) y b) ya fueron resueltos en el ejercicio 4 del final del 09/02/2012. El punto c) es el mismo (salvo el cambio de que hay derivada segunda de y en vez de primera, pero en el procedimiento es lo mismo). Al parecer para esta fecha se dieron cuenta que no es posible obtener la anti-transformada. Cómo la obtendríamos es fácil: obtenemos la raíz irracional (real) del polinomio del divisor y factorizamos (Ruffini). Con el polinomio de grado dos, lo expresamos completando cuadrados. De esta manera, la transformada nos quedará:

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{1}{(s-\alpha_0)[(s-\alpha_1)^2+\alpha_2]}$$

Siendo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ constantes a determinar. Luego aplicamos una pseudo-separación por 'fracciones simples', quedándonos:

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{A}{(s-\alpha_0)} + \frac{Bs+C}{(s-\alpha_1)^2+\alpha_2}$$

Separamos el segundo término y lo escribimos de tal forma que nos puedan quedar estilos de transformadas de senos y cosenos:

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{A}{(s-\alpha_0)} + K\frac{(s-\alpha_1)}{(s-\alpha_1)^2+\alpha_2} + J\frac{\alpha_2}{(s-\alpha_1)^2+\alpha_2}$$

Donde K y J son constantes que se consiguen luego de ir haciendo *juegos* para obtener en el numerador lo que corresponde. Por lo tanto, la antitransformada *y(t)* quedará:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{Y}(s)\} = Ae^{\alpha_0 t} + K\cos(\alpha_2 t)e^{\alpha_1 t} + J\sin(\alpha_2 t)e^{\alpha_1 t}$$

5) ¿Puede ser $m(x,y) = e^{3x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\cos(3y) + \frac{y}{x^2+y^2}\sin(3y)\right)$ la parte real del potencial complejo de un cierto campo vectorial?. En caso afirmativo:
a) Halle dicho potencial complejo.
b) Indique la ecuación de las líneas de flujo y las equispotenciales.
c) Explique por qué dichas curvas son ortogonales.
d) Si Γ es una curva cerrada simple, calcule todos los valores posibles que puede tomar la circulación y el flujo de dicho campo vectorial sobre Γ.

Podríamos ponernos a hacer cuentas para decir cosas sobre las ecuaciones de Cauchy-Riemann, pero viendo un poco como está la cosa, podemos ver que hay un e^{3z} metido (por los senos y cosenos, y la exponencial que está metida afuera), y algo con $\frac{1}{z}$, por esas fracciones que aparecen. Y es así. En particular:

$$m(x,y) = \text{Re}\left(\frac{e^{3z}}{z}\right)$$

Por lo tanto, como es parte real de una función analítica fuera de $z=0$, cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por lo que la respuesta es: SI.

a) Como ya mencionamos:

$$G(z) = \frac{e^{3z}}{z}$$

b) $G(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y) = m(x,y) + i\psi(x,y)$

Líneas equispotenciales:

$\phi(x,y) = m(x,y) = c(c \in \mathbb{R})$

$$\frac{e^{3x}}{x^2+y^2}(x\cos(3y) + y\sin(3y)) = c$$

Líneas de flujo:

$\psi(x,y) = k(k \in \mathbb{R})$

Luego de ver cómo es la parte imaginaria de la función *G(z)*:

$$\frac{e^{3x}}{x^2+y^2}(x\sin(3y) - y\cos(3y)) = k$$

c) Dado que $\overline{\nabla}\delta(x,y) \perp \delta(x,y) = cte$ vemos que si $\overline{\nabla}\phi(x,y) \perp \overline{\nabla}\psi(x,y)$, resultará que $\phi(x,y) = cte \perp \psi(x,y) = cte$:

$$\overline{\nabla}\phi(x,y) = (\phi'_x(x,y), \phi'_y(x,y)); \overline{\nabla}\psi(x,y) = (\psi'_x(x,y), \psi'_y(x,y))$$
$$\overline{\nabla}\phi(x,y).\overline{\nabla}\psi(x,y) = (\phi'_x(x,y), \phi'_y(x,y)).(\psi'_x(x,y), \psi'_y(x,y))$$

Como ya digimos $G(z) \in H/\mathbb{C} - \{0\}$, por lo que cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\forall z \neq 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) \end{cases} \tag{16}$$

Reemplazamos:

$$\overline{\nabla}\phi(x,y).\overline{\nabla}\psi(x,y) = (\phi'_x, \phi'_y)(-\phi'_y, \phi'_x) = \phi'_x\phi'_y - \phi'_x\phi'_y = 0$$

Por lo tanto, las curvas serán ortogonales.

d) Primero definimos qué es lo que nos piden:

$$\int_C \overline{f(z)}dz = \int_C G'(z)dz = L(f) + iF(f) \tag{17}$$

Donde C es el camino, y f el campo vectorial (expresado como función compleja). L el trabajo o circulación, y F el flujo.

En particular, si se trata de una curva cerrada la cosa se hace sencilla también. Tenemos sólo dos casos de curvas: una que encierre a $z_0 = 0$, y alguna que no. La que no encierra, al ser $G(z)$ una función análitica dentro y sobre la curva, la integral dará 0. En el otro caso podemos directamente usar la fórmula integral de Cauchy (sería lo mismo que usar el teorema de los residuos, o cualquier otra cosa).

Siendo $G'(z) = \frac{e^{3z}}{z^2}(3z-1)$ aplicamos:

$$\oint_\Gamma \frac{e^{3z}(3z-1)}{z^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}[(e^{3z}(3z-1))']_{z=0} = 2\pi i[9ze^{3z}]_{z=0} = 0$$

Bueno, en este caso siembre vale 0 el trabajo y el flujo.

3. Final 12/07/2012

1) Estudiar para qué valores de α y β la

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x-1|^{\alpha}}{|x|^{\beta}(x+1)}dx$$

C.V en cada uno de sus puntos singulares. ¿Existen valores de α y β de modo que I C.V.?

Primero que nada, la respuesta ante todo es NO, claramente. Porque en el denominador a una $(x+1)$, y como ya vimos, la función $\frac{1}{x}$ diverge por todos lados al integrarla de 0 a ∞. Para hacer aunque sea un poco más interesante, hacemos un pequeño cambio:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x-1|^{\alpha}}{|x|^{\beta}(x^2+1)}dx$$

Ahora, para que la integral de ε a ∞ ($\varepsilon > 0$), el polinomio de abajo debe ser mayor en un grado al de arriba:

$$\beta + 2 - \alpha > 1 \rightarrow \beta > \alpha - 1$$

Además, para que converja la integral de 0 a ε, es necesario que $\beta < 1$ (porque ya vimos que en ese intervalo son esas polinomios los que hacen que converja). Puede sonar raro porque acá no estoy tomando en cuenta el resto de la función... esto no lo dije yo, lo dijo Mario (no recuerdo exactamente la explicación) so: Seems legit. Por lo tanto, en este caso cambiado:

$$\beta > \alpha - 1; \beta < 1$$

Para el caso anterior también se puede aplicar lo mismo creo, aunque hay que aplicar más particiones teniendo en cuenta la singularidad en $x_0 = 1$, y justamente de ahí sale que no puede converger la integral porque el cacho que hace que haya una singularidad tiene grado igual a 1.

2) En una pared seminfinita definida por la región en $\mathbb{R}^3$: $A = (x, y, z)/0 \leq x \leq 2, y > 0$ fluye calor en régimen permanente o estacionario de la variable z. La temperatura en el plano $x = 0$ es una función $g(y)$, la cara correspondiente a $x = 2$ está aislada mientras que al base en el plano $z = 0$ se mantiene a $0°C$. Proponga una función $g(y)$ y halle la temperatura $u(x, y, z)$ en cada punto de la pared.

Como se vé, no se entiende un choto el enunciado. A tal punto, que dice que no depende de la variable z, pero dice que cuando $z = 0$ entonces la función vale 0... (debe estar re mal escrito). Lo dejo para charlarlo para después resolverlo si determinamos que $y = 0$, o algo así.

3) La aplicación de las leyes de Kirchoff a un circuito da por resultado el siguiente par de ecuaciones que relacionan las intensidades de corriente de cada malla (medidas en Amper) con la tensión aplicada (en volts): $\begin{cases} v(t) = LI_1'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t [I_2'(\alpha) + I_1'(\alpha)]d\alpha \\ 0 = RI_2(t) + \frac{1}{C}\int_0^t [I_2'(\alpha) + I_1'(\alpha)]d\alpha \\ I_1(0) = I_2(0) = 0 \end{cases}$

Donde L, R y C son respectivamente la autoinducción en Henrys, la resistencia en Ohms y la capacitancia en Faradays.

a) Halle las Transformadas de Laplace de $I_1(t)$ e $I_2(t)$ en función de la T.L. de $v(t)$, y luego halle las correspondientes intesidades $I_1(t)$ e $I_2(t)$ si $L = R = C = 1$ cuando la tensión aplicada es la función de Heavside.
b) Analice si $I_1(t)$ e $I_2(t)$ halladas en a) están acotadas.

Bueno, el enunciado estaba bastante mal escrito.. empezando por la integral que adentro en vez de α tenía todo con t, o sea, lo mismo que el límite de integración (que justamente está mal eso).
Quitando eso, empezamos aplicando la transformada de Laplace, sabiendo una propiedad que no nos comentaron:

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(t')dt'\} = \frac{F(s)}{s} \tag{18}$$

$$\begin{cases} Ls\mathcal{I}_1(s) + \frac{1}{sC}\left(\mathcal{I}_1(s) + \mathcal{I}_2(s)\right) = \mathcal{V}(s) \\ R\mathcal{I}_2(s) + \frac{1}{sC}\left(\mathcal{I}_1(s) + \mathcal{I}_2(s)\right) = 0 \end{cases}$$

Restamos la primera ecuación con la segunda:

$$Ls\mathcal{I}_1(s) - R\mathcal{I}_2(s) = \mathcal{V}(s) \Rightarrow \mathcal{I}_1(s) = \frac{\mathcal{V}(s) + R\mathcal{I}_2(s)}{Ls}$$

Reemplazamos esta igualdad en la segunda ecuación:

$$R\mathcal{I}_2(s) + \frac{1}{sC}\left(\frac{\mathcal{V}(s) + R\mathcal{I}_2(s)}{Ls} + \mathcal{I}_2(s)\right) = 0$$

$$\mathcal{I}_2(s)\left(R + \frac{R}{LCs^2} + \frac{1}{sC}\right) = \mathcal{I}_2(s)\left(\frac{RLCs^2 + R + Ls}{LCs^2}\right) = -\frac{\mathcal{V}(s)}{LCs^2}$$

$$\mathcal{I}_2(s) = -\frac{\mathcal{V}(s)}{RLCs^2 + Ls + R}$$

Ahora reemplazamos en $\mathcal{I}_1(s)$ y nos queda finalmente:

$$\mathcal{I}_1(s) = \frac{\mathcal{V}(s)}{Ls}\frac{RLCs^2 + Ls}{RLCs^2 + Ls + R}$$

Si $v(t) = H(t)$ y $R = L = C = 1$, vemos que para $t < 0$ ambas funciones son nulas. Para $t > 0$, $\mathcal{V}(s) = \frac{1}{s}$. Entonces:

$$\mathcal{I}_2(s) = -\frac{1}{s}\frac{1}{s^2 + s + 1} = -\left(\frac{1}{s} + \frac{As + B}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right)$$

Resolviendo un poco: $A = B = -1$. Entonces:

$$\mathcal{I}_2(s) = -\frac{1}{s} + \frac{s + 1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{s} + \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Por lo tanto:

$$I_2(t) = -1 + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}}$$

$$\mathcal{I}_1(s)=\frac{1}{s^2}\frac{s^2+s}{s^2+s+1}=\frac{s+1}{s(s^2+s+1)}=\frac{1}{s}+\frac{As+B}{\left(s+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}}$$

Haciendo cuentas: $A=-1$ y $B=0$.

$$\mathcal{I}_1(s)=\frac{1}{s}-\frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}}=\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}}$$

$$I_1(t)=1-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}}$$

b) Bueno, finalmente las corrientes están acotadas (pues son funciones acotadas, y ademas multiplicadas por una exponencial de exponente negativa).

4) Sea $f(t)\begin{cases} e^{-t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases}$

a) Verifique que se cumplen las hipótesis necesarias para la existencia de la transformada y antitransformada de Fourier. Halle dicha transformada.

b) A partir de dicha transformada:

i) obtener: $\int_0^\infty \frac{d\omega}{1+\omega^2}$

ii) probar que si $t>0$**:** $\int_0^\infty \frac{\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)}{1+\omega^2}d\omega=\pi e^{-t}$

a) Bueno, enunciamos las hipótesis necesarias:

1. $f(t)$ debe ser absolutamente integrable, lo que quiere decir que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty \tag{19}$$

Vemos que esto se cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^\infty|e^{-t}|dt=\int_0^\infty e^{-t}dt=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-t}dt=\lim_{R\to\infty}e^{-t}\Big|_R^0=1<\infty$$

2. $f(t)$ debe ser suave a trozos. Cosa que es cierto (en $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$).

3. Deben existir los límites laterales para todo $t\in\mathbb{R}$, cosa que es cierto, porque sólo hay una discontinuidad y es de salto (en $t_0=0$).

Por todo esto, la transformada y Antitransformada puede existir. Calculamos la Transformada:

$$\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{20}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-t}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{1+i\omega}e^{-t}e^{-i\omega t}\Big|_\infty^0=\frac{1-i\omega}{1+\omega^2}\left(1-\lim_{R\to\infty}e^{-R}e^{-i\omega R}\right)=\frac{1-i\omega}{1+\omega^2}$$

Para el último paso, recordar que el $e^{-i\omega R}$ será oscilatoria, pero es acotada, mientras que e^{-t} tiende a 0.

b) i) Vemos de calcular la Antitransformada:

$$\frac{f^+(t)+f^-(t)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-i\omega}{1+\omega^2}e^{i\omega t}d\omega$$

Si $t=0$:

$$\frac{f^+(0)+f^-(0)}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{1+\omega^2}-i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega d\omega}{1+\omega^2}\right)$$

Se puede ver que la primera integral es par, y la otra impar, por lo que se anula (además debe pasar, porque del otro lado de la igualdad no hay elemento imaginario). Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{1+\omega^2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{d\omega}{1+\omega^2}\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{d\omega}{1+\omega^2}=\frac{\pi}{2}$$

ii) Si $t>0\rightarrow f(t)=e^{-t}$:

$$e^{-t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-i\omega}{1+\omega^2}(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t))d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)}{1+\omega^2}d\omega+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega t)-\omega\cos(\omega t)}{1+\omega^2}d\omega\right]=e^{-t}$$

Nuevamente, el segundo término es impar y se anula (como debe pasar para que tenga sentido). Entonces:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)}{1+\omega^2}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)}{1+\omega^2}d\omega=e^{-t}$$

$$\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)}{1+\omega^2}d\omega=\pi e^{-t}$$

5)a) Halle el D.S.F. de senos de $f(x)=1$ en el intervalo $(0;2)$ por derivación del D.S.F. de una función adecuada, justificando porqué dicha derivación es posible. b) ¿Puede deducirse del D.S.F. de f(x) de $f(x)$ el valor de la suma de la serie $\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{2n-1}$? En caso afirmativo, hállelo.

a) Elijo $g(x)=x\rightarrow g'(x)=f(x)=1$.
Por teorema de derivación de la serie de Fourier, derivando la serie término a término, esta converge a $\frac{g'^+(x)+g'^-(x)}{2}$ en todo el intervalo. Como en este caso la función es continua en todo el intervalo, convergerá directamente a $f(x)$.

Ahora que terminamos con los formalismos, decidimos calcular el D.S.F. de COSENOS de $g(x)$ (para que al derivarlo aparezcan los senos):

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi}{2}nx\right)$$

Calculamos los a_n:

$$a_n=\int_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx=\left.\frac{\cos(\frac{n\pi}{2}x)}{(\frac{n\pi}{2})^2}\right|_0^2+\left.\frac{x\sin(\frac{n\pi}{2})}{(\frac{n\pi}{2})}\right|_0^2=\frac{4}{\pi^2n^2}((-1)^n-1)$$

Si n es par, $a_n = 0$. Entonces debemos poner n impar. Teniendo en cuenta que $((-1)^n - 1) = -2$, nos queda:

$$a_n = \frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}(-2) = \frac{-8}{\pi^2(2n-1)^2}$$

Calculamos a_0:

$$a_0 = \int_0^2 x dx = 2$$

$$\Rightarrow g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi^2(2n-1)^2} \cos\left((2n-1)\frac{\pi}{2}x\right)$$

Por lo tanto:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}x\right)$$

b) La respuesta es Si (cómo va a ser no? xD). Si $x = 1 \to \sin((2n-1)\frac{\pi}{2}) = -(-1)^n$.

$$f(1) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-(-1)^n)}{\pi(2n-1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}$$

4. Final 19/07/2012

1) a) Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ una función continua en su dominio y tal que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

Explique cuando se dice que la $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ C.V. y cuando existe el valor principal de dicha integral.
b) Sea

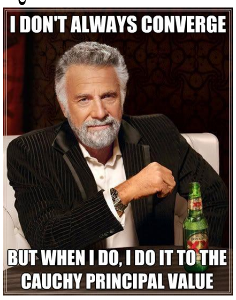
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{(x^2+1)(x-1)} dx$$

Analizar su C.V. ¿Existe su valor principal?
c) En caso de que el valor principal de I exista, calcúlelo.

a) Empezamos definiendo el Valor Principal de Cauchy (VPC para los amigos). El VPC de una función $f(x)$ existe cuando:

$$\exists \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

Que exista el VPC no implica que la integral converja, pero si lo hace, es al VPC.



En el caso que nos presentan, podemos dividir la integral en 4 partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{1-\varepsilon}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{1+\varepsilon} f(x)dx + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} f(x)dx$$

Con $\varepsilon > 0$. Sean $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ y $g_4(x)$ tales que:

$$\int_{-\infty}^{1-\varepsilon} g_1(x)dx\ C.V. \qquad \int_{1-\varepsilon}^{1} g_2(x)dx\ C.V. \qquad \int_{1}^{1+\varepsilon} g_3(x)dx\ C.V. \qquad \int_{1+\varepsilon}^{\infty} g_4(x)dx\ C.V$$

Si Existen funciones que cumplan con ello y tales que:

$$|g_1(x)| > |f(x)| (x \in (-\infty; 1-\varepsilon))$$

$$|g_2(x)| > |f(x)| (x \in (1-\varepsilon; 1))$$

$$|g_3(x)| > |f(x)| (x \in (1; 1+\varepsilon))$$

$$|g_4(x)| > |f(x)| (x \in (1-\varepsilon; \infty))$$

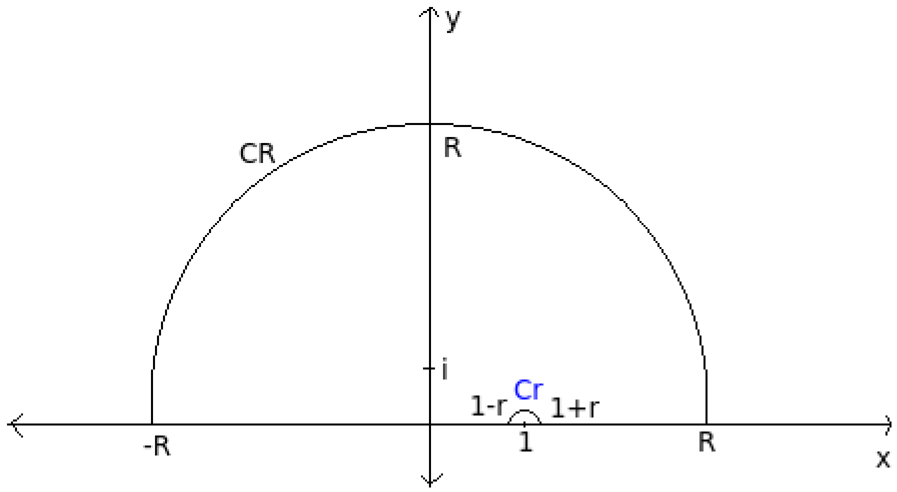
Entonces podemos afirmar que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ C.V.

b) Por el criterio de Dirichlet, una serie acotada y alternada sobre una función no acotada hacia infinito, la integral convergerá, y por lo tanto el VPC existe.Hay que notar también que para $z = 1$ hay una singularidad en la recta de integracion pero al evaluarse el coseno en este punto vale 0, lo cual da una indeterminación 0/0 lo que si se desarrolla termina en una singularidad evitable.

c) Siendo:

$$f(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{(z^2+1)(z-1)}$$

Integrarémos sobre la siguiente curva:



$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \oint_{\Gamma_{Rr}} f(z)dz = \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{-R}^{1-r} f(x)dx + \int_{C_r} f(z)dz + \int_{1+r}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}(f(z), z_k)$$

Demostrando más adelante que las integrales sobre C_r converge a $\frac{\pi}{2}$y C_R converge a 0, queda:

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \oint_{\Gamma_{Rr}} f(z)dz = \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{-R}^{1-r} f(x)dx + \int_{r+1}^{R} f(x)dx + \int_{C_r} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f(z), z = i)$$

Calculamos ese residuo aplicando un simple límite (sabiendo que se trata de un polo de orden 1, porque el siguiente límite va a dar distinto de 0 e infinito):

$$\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{(z+i)(z-i)(z-1)} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2i(i-1)}$$

Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}$$

Corroborado con **Wolfram Alpha**.
Y en Particular, si se pedía lo mismo pero con seno en vez de coseno, da el mismo resultado sin el $+\frac{\pi}{2}$ (Eso se ve si pongo todas las cuentas, pero no vale la pena.. simplemente nos quedamos con la parte real de la integral y listo).

Demostramos que C_R tiende a 0. Para esto, $g(z) = \frac{1}{(z^2)+1)(z-1)}$ (o sea, todo $f(z)$ menos la exponencial) debe tender a 0 cuando el módulo de z tiende a infinito, cosa que sucede. Entonces decimos que $|g(z)| \leq M_R$ (y M_R tiende a 0 cuando R tiende a infinito).

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{(z^2+1)(z-1)}dz\right| \leq \int_{C_R} \frac{|e^{i\frac{\pi}{2}z}|}{|(z^2+1)||(z-1)|}|dz|$$

Siendo $z = Re^{i\theta} \rightarrow dz = iRe^{i\theta}d\theta$:

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{(z^2+1)(z-1)}dz\right| \leq \int_0^{\pi} |f(z)e^{i\frac{\pi}{2}Re^{i\theta}}||iRe^{i\theta}||d\theta| \leq \int_0^{\pi} M_R R|e^{i\frac{\pi}{2}R(\cos(\theta)+i\sin(\theta))}d\theta|$$

$$\leq M_R R\int_0^{\pi} |e^{i\frac{\pi}{2}\cos(\theta)}||e^{-\frac{\pi}{2}R\sin(\theta)}|d\theta \leq 2M_R R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}R\theta}d\theta$$

Como $\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta$ en el intervalo $(0; \frac{\pi}{2})$, seguimos acotando:

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{(z^2+1)(z-1)}dz\right| \leq 2M_R R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}\frac{2}{\pi}R\theta}d\theta = 2M_R \Rightarrow \lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{(z^2+1)(z-1)}dz\right| = 0$$

Bueno, si todavía no chivaste para hacer esto, ahora hay que ver qué le pasa a C_r. Aplicando el Lema de Jordan:

$$C_r : \{|z-1| = r, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

Donde ϕ es el ángulo que se forma al recorrer la curva C_r, respecto del eje x. El lema dice:

$$\lim_{r\to 0} f(z)dz = ik(\phi_2 - \phi_1) \tag{21}$$

Siendo ϕ_2 en nuestro caso 0, y ϕ_1 π (ya que estoy recorriendo la curva en sentido anti horario) , mientras que k es el valor del residuo en $z = z_0$.
Este lema se puede aplicar solamente en caso de que en $z = 1$ haya un polo simple, cosa que es así:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{(z^2+1)(z-1)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{i}{2} = k$$

Ahora si, aplicando el Lema de Jordan:

$$\lim_{r\to 0} f(z)dz = ik(0-\pi) = \frac{\pi}{2}$$

De esta manera, queda demostrado el resultado.

2)a) En un bloque sólido que ocupa el semiespacio $A = \{(x,y,z)/y > 0\}$ fluye el calor en régimen permanente en dirección paralela al plano $z = 0$. La temperatura en la pared $y = 0$ es $f(x)$. Halle la temperatura $u(x,y,z)$ en cada punto del sólido en función de $f(x)$ utilizando separación de variables o transformada de Fourier. ¿Qué carácterísticas debe cumplir $f(x)$ para que el problema tenga solución?
b) Resuelva para

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

c) Resuelva el problema de la parte a) con la función propuesta en la parte b) mediante transformación conforme.
REVISAR

a) Lo resolvemos por TF:

$$\nabla^2 u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

(Estoy asumiendo que a lo que se refiere el enunciado es que no depende de z la cosa esta, porque dice que el calor fluye paralelo al plano del piso, y porque en $y = 0$ la función no depende de z sino solamente de x). ESTO ES LO QUE HAY QUE REVISAR.

Aplico la Transformada:

$$\mathcal{U}(\omega, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y)e^{-i\omega x}dx$$

Dejando en claro que ahora $U(\omega, 0) = F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$. Entonces la ecuación diferencial queda:

$$\mathcal{U}''_{yy} - \omega^2\mathcal{U} = 0 \rightarrow \mathcal{U}(\omega, y) = A(\omega)e^{-\omega y} + B(\omega)e^{\omega y}$$

Tomando siempre el módulo de ω:

$$\mathcal{U}(\omega, y) = A(\omega)e^{-|\omega|y} + B(\omega)e^{|\omega|y}$$

Esto es válido, pues como combinación pueden dar las mismas funciones que antes (pues se las puede ver como funciones partidas). Esto nos va a servir para poder descartar un término: dada la igualdad de Parseval:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \tag{22}$$

Si $\mathcal{U}$ diverge, entonces u divergerá, por lo que es necesario que $B(\omega) = 0$. Además debe cumplirse la condición de borde:

$$\mathcal{U}(\omega, 0) = A(\omega) = F(\omega) \ \rightarrow \mathcal{U}(\omega, y) = F(\omega)e^{-|\omega|y}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = [(f * g)(x)](x, y)$$

Siendo $g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-|\omega|y}\}$ Si no te acordás de que justo hay una función que cumple algo parecido, cagaste, porque el punto B es simplemente resolver esa integral y listo: Como $\mathcal{F}\{\frac{1}{1+t^2}\} = \pi e^{-|\omega|} \rightarrow g(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}\frac{1}{\pi}$ (se consigue usando la propiedad de escala con $f(x/y)$ para que queda la misma tranformada).

b) Como ahora lo que hay que hacer es resolver esa integral (porque sino, está al pedo el punto), si no sabés lo de recién arriba, poné un mensaje de "quiero que consideren este punto como bien hecho porque no me tengo que saber esto de memoria". Igual acá hago la cuenta:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x - u)^2 + y^2}du = \frac{y}{\pi}\int_{x-1}^{x+1} \frac{1}{z^2 + y^2}dz$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\Big|_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right)\right)$$

Como uno siempre se acuerda de la integral esa, es obvio que en el momento te sale sin problemas (Aclaración: el final abajo no tenía ninguna información sobre estas forradas que comenté.. o sea, te están cagando).

c) Dado que no es que tenemos un solo valor, o uno para los x negativos y otro para los positivos, no podemos aplicar las transformadas del tipo $\frac{1}{z}$ porque no vamos a llegar a nada lindo. Aplicamos directamente que tenemos que medir ángulos desde $x = 1$ y $x = -1$. Entonces definimos:

$$\begin{cases} \theta_1(x,y) = \arctan(\frac{y}{x-1}) \\ \theta_2(x,y) = \arctan(\frac{y}{x+1}) \end{cases}$$

Donde ambas fuciones, por ser función *ángulo*, que es la parte imaginaria de la función $\ln(z)$, son análiticas.

$$u(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta_1 = \theta_2 = 0 \\ 0 & \text{si } \theta_1 = \theta_2 = \pi \\ 1 & \text{si } \theta_1 = \pi; \theta_2 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}(\theta_1(x,y) - \theta_2(x,y)) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right)\right)$$

Se ve que ambas soluciones son iguales, por lo que estuvo todo bien hecho :)

3) Dado el siguiente sistema

$$\begin{cases} z'''(t) + \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau = H(t) \\ \int_0^t \int_0^\alpha x(\tau)y(\alpha-\tau)d\tau d\alpha + z'(t) = t^2 \end{cases}$$

$H(t)$ **es la función de Heavside y** $z''(0) = z'(0) = z(0) = 0$ **y utilizando las Transformada de Laplace obtenga** $z(t)$ **(puede dejarla expresada como un producto de convolución) y dos funciones** $x(t)$ **e** $y(t)$ **que lo satisfagan.**

Empezamos por escribir un poco más lindo la cosa esta, porque tantas integrales pueden marear:

$$\begin{cases} z'''(t) + (x*y)(t) = H(t) \\ \int_0^t (x*y)(t')dt' + z'(t) = t^2 \end{cases}$$

Aplicamos la transformada de Laplace miembro a miembro (y ya recordamos que $z(0) = z'(0) = z''(0) = 0$). Para esto hay que recordar las propiedades que implican:

$$\mathcal{L}\{(x*y)(t)\} = \mathcal{X}(s)\mathcal{Y}(s) \qquad \mathcal{L}\{\int_0^t f(t')dt'\} = \frac{\mathcal{F}(s)}{s}$$

Entonces:

$$\begin{cases} s^3\mathcal{Z}(s) + \mathcal{X}(s)\mathcal{Y}(s) = \frac{1}{s} & (1) \\ \frac{1}{s}\mathcal{X}(s)\mathcal{Y}(s) + s\mathcal{Z}(s) = \frac{2}{s^3} & (2) \end{cases}$$

Hacemos $(1) - (2) \times s$:

$$s^3\mathcal{Z}(s) - s^2\mathcal{Z}(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}$$

$$\mathcal{Z}(s)(s^3 - s^2) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}$$

$$\mathcal{Z}(s) = (\frac{1}{s} - \frac{2}{s^2})\frac{1}{s^3 - s^2} = \frac{s-2}{s^4(s-1)} = \frac{1}{s^3(s-1)} + \frac{-2}{s^4(s-1)}$$

Aplicamos Fracciones simples:

$$\mathcal{Z}(s) = \frac{(-1)}{s^3} + \frac{(-1)}{s^2} + \frac{(-1)}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s^4} + \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s} + \frac{(-2)}{s-1}$$

$$\Rightarrow z(t) = -e^t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 3t + 11$$

Ahora buscamos un par de funciones $x(t)$ e $y(t)$ (aunque podríamos decir que alguna vale 0 y la otra vale alguna cosa.. pero no creo que eso es lo que quieren que hagamos). Para esto hacemos $(2) \times s^2 - (1)$:

$$\mathcal{X}(s)\mathcal{Y}(s)(s-1) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{X}(s)\mathcal{Y}(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

Elijo entonces $y(t) = H(t) = 1 \to \mathcal{Y}(s) = \frac{1}{s}$. Entonces $\mathcal{X}(s) = \frac{1}{s-1} \to x(t) = e^t$. Entonces:

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = 1 \\ z(t) = -e^t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 3t + 11 \end{cases}$$

4) a) Sea E el espacio euclideo real de las funciones seccionalmente continuas periódicas de período $2T$ con el producto interno: $(f,g) = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)g(x)dx$. Sea $\{\phi_i(x)\}_1^n$ un sistema ortonormal en E. Demuestre que:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\phi_i(x)dx\right]^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^{2T} |f(x)|^2 dx$$

b) Del desarrollo en serie trigonométrico de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } 0 < x < T \\ x & \textbf{si } T < x < 2T \end{cases}$ **obtenga:**

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ y ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

a) Dado el conjunto ortonormal dado, si lo completamos, obtendremos un sistema ortonormal que será base de E, por lo que todo vector de tal espacio puede escribirse como:

$$f(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + ... + a_n\phi_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x)$$

Planteamos el producto interno con algún elemento de la base:

$$(f,\phi_j) = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\phi_j(x)dx = \frac{1}{T}\int_0^{2T}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x)\phi_j(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{1}{T}\int_0^{2T}\phi_n(x)\phi_j(x)dx\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\phi_n,\phi_j)$$

Por ser base ortonormal:

$$(f,\phi_j) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\delta_{n,j} = a_j$$

Vemos cuánto vale la norma al cuadrado si la base es completa:

$$\parallel f \parallel^2 = (f,f) = \frac{1}{T}\int_0^{2T}|f(x)|^2dx = \frac{1}{T}\int_0^{2T}\sum_{i=1}^{\infty}a_i\phi_i(x)\sum_{j=1}^{\infty}a_j\phi_j(x)dx$$

$$\parallel f \parallel^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_ia_j\left[\frac{1}{T}\int_0^{2T}\phi_i(x)\phi_j(x)dx\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_ia_j(\phi_i,\phi_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_ia_j\delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty}a_i^2$$

Separamos entre la base dada y con lo que completamos para tener la base del espacio E:

$$\parallel f \parallel^2 = \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty}a_j^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^{2T}|f(x)|^2dx = \parallel f \parallel^2 = \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty}a_j^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^{2T}|f(x)|^2dx \geq \sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^{2T}|f(x)|^2dx \geq \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{T}\int_0^{2T}f(x)\phi_i(x)dx\right]^2$$

Y así queda demostrado.

b) Obtenemos el desarrollo trigonométrico de:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < T \\ x & \text{si } T < x < 2T \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi}{T}x) + b_n\sin(\frac{n\pi}{T}x)$$

Calculamos los términos:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)dx = \frac{1}{T}\int_T^{2T} xdx = \frac{3}{2}T$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\Big|_T^{2T} + \frac{1}{\frac{n\pi}{T}}\,x\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\Big|_T^{2T}\right) = \frac{T}{(n\pi)^2}(1-(-1)^n)$$

Si n es par, $a_n = 0$, si n es impar, $a_n = \frac{2T}{(n\pi)^2}$. Lo tenemos en cuenta para escribirlo bien luego. Ahora calculamos los otros coeficientes:

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\sin(\frac{n\pi}{T}x)dx = \frac{1}{T}\left(\left(\frac{T}{n\pi}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\Big|_T^{2T} - \frac{T}{n\pi}\,x\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\Big|_T^{2T}\right)$$

$$b_n = -\frac{T}{n\pi}\left(2-(-1)^n\right)$$

Este último fue verificado con **Wolfram Alpha**.
Por lo tanto, el desarrollo queda:

$$f(x) = \frac{3}{4}T + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2T}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) - \frac{T}{n\pi}(2-(-1)^n)\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)$$

Resolvemos lo que se nos pide: i) Si $x = 2T$ la serie converge puntualmente a $\frac{f^+(2T)+f^-(2T)}{2} = T$. Entonces:

$$T = \frac{3}{4}T + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2T}{\pi^2(2n-1)^2}\cos(2n\pi) - \frac{T}{n\pi}(2-(-1)^n)\sin(2n\pi) = \frac{3}{4}T + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2T}{\pi^2(2n-1)^2}$$

$$\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ii) Seguramente este se resuelva aplicando el teorema de Parseval, pero luego de hacer algunas cuentas la cosa que horrible, y dependiente de T (además de que es imposible despejar el $\frac{1}{n^4}$ porque el término que termina elevado a la cuarta es el de los cosenos, que sólo tiene los términos impares...). Me llama la atención esa ayuda de $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

5. Final 04/08/2012

1) a) Sea: $f(t) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{x^2+1}dx$ **Analizar su convergencia y calcular** $f(t)$**. b) De dicha integral obtenga la Transformada de Fourier de** $f(t)$**.**

a) Analizamos la convergencia de la integral. Para esto, dividimos la integral en dos partes:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{x^2+1}dx = \int_0^\varepsilon \frac{\cos(tx)}{x^2+1}dx + \int_\varepsilon^\infty \frac{\cos(tx)}{x^2+1}dx$$

Para $\varepsilon > 0$. La primera integral está más que claro que converge, pues no hay ninguna discontinuidad ni cosas raras (que no exista primitiva es otra cosa :P). Para la segunda decimos que en el intervalo $(\varepsilon; \infty)$ se cumple que:

$$\frac{\cos(tx)}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{x^2}$$

La integral de la última en tal intervalo converge, como ya fue visto en clase, por lo tanto la de $\frac{\cos(tx)}{x^2+1}$ también lo hará. La resolución de la integral en sí ya fue hecho en el **ejercicio 1 del final del 09/02/2012 (sección 1)**, por lo que dejamos simplemente expresado el resultado:

$$f(t) = \frac{\pi}{2}e^{-|t|}$$

b) Nos piden calcular la Transformada de Fouier:

$$\mathcal{F}\{\frac{\pi}{2}e^{-t}\} = \frac{\pi}{2}\mathcal{F}\{e^{-|t|}\}$$

Como se trata de una función par:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \pi\int_0^\infty e^{-t}e^{-i\omega t}dt = \pi\int_0^\infty e^{-t(1+i\omega)}dt = \pi\frac{1}{1+i\omega}\; e^{-t-i\omega t}\Big|_\infty^0 = \pi\frac{1-i\omega}{1+\omega^2}\left(1 - \lim_{R\to\infty} e^{-R}e^{-i\omega R}\right)$$

Teniendo en cuenta que $e^{-i\omega t}$ es una función acotada mientras que e^{-t} tiende a 0:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \pi\frac{1-i\omega}{1+\omega^2}$$

<u>Nota</u>: este mismo resultado es posible apreciarlo en el **ejercicio 4 del final del 12/07/2012 (sección 3)**

2) a) Demuestre la propiedad que permite calcular la Transformada de Laplace de la derivada primera de una función $f(t)$ **conociendo la Transformada de Laplace de** $f(t)$**. Aplique dicha propiedad para obtener la Transformada de Laplace de la derivada segunda de** $f(t)$**. b) Aplique la Transformada de Laplace para resolver:**

$$y'' - 4y' + 5y = x(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } 0 < t < 1 \\ 1 + e^{-t} \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

$y(0) = y'(0) = 0$

a) Nos piden que demostremos la propiedad: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

Lo vamos a hacer aplicando la definición de Transformada de Laplace e integrando por partes:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$

Integramos por partes, eligiendo como f a e^{-st} y como dg a $f'(t)dt$:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = e^{-st}f(t)\big|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}f(t)dt$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Reacomodamos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Ahora aplicamos para obtener la de la segunda derivada de $f(t)$. Para esto definimos:

$$g(t) = f'(t) \to g'(t) = f''(t) \to \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = sF(s) - f(0)$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = sG(s) - g(0)$$

Reemplazando:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

b) Apliquemos Transformada de Laplace a la ecuacion diferencial:

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y = x(t)\mathcal{L} \to s^2\mathcal{Y}(s) - 4s\mathcal{Y}(s) + 5\mathcal{Y}(s) = \mathcal{X}(s)$$

$$\to \mathcal{Y}(s) = \frac{\mathcal{X}(s)}{s^2 - 4s + 5}$$

Guarda, tenemos que aplicar la transformada a la función partida $x(t)$ entera, no lo podemos dividir en partes para cada t particular, porque eso no es válido supuestamente.

Más adelante vamos a ver que ni siquiera hará falta calcular la transformada de $x(t)$, pero lo haremos por si quieren tirar facha o despejar dudas (?):

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

$$X(s) = \int_0^1 1e^{-st}dt + \int_1^\infty (e^{-t} + 1)e^{-st}dt$$

$$X(s) = \int_0^1 e^{-st}dt + \int_1^\infty e^{-t(s+1)}dt + \int_1^\infty e^{-st}dt$$

$$X(s) = \left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_0^1 + \left.\frac{-e^{-t(s+1)}}{s+1}\right|_1^\infty + \left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_1^\infty$$

$$X(s) = \left[\frac{-e^{-s}}{s} - \left(\frac{-1}{s}\right)\right] + \left[0 - \left(\frac{-e^{-(s+1)}}{s+1}\right)\right] + \left[0 - \left(\frac{-e^{-s}}{s}\right)\right]$$

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}$$

Bueno, ahi tenemos el $X(s)$.

Si volvemos a la solucion $Y(s)$ que habíamos encontrado:

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\mathcal{X}(s)}{s^2 - 4s + 5}$$

Y como vemos, nos quedarían cuenterios largos, es una paja, ain't nobody got time for that. Entonces:

$$\mathcal{Y}(s) = X(s)\frac{1}{s^2 - 4s + 5}$$

Y antitransformar esto, si recordamos la magia de la convolución...

$$y(t) = \left(x(t) * \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2 - 4s + 5}\}\right)(t)$$

Y ahí se ve por que no hacía falta calcular la transformada de $x(t)$...

Calculemos entonces la otra parte, que esa sale facil (?):

$$\frac{1}{s^2 - 4s + 5} = \frac{1}{(s-2)^2 + 1}$$

Esto último es completando cuadrados, porque el polinomio ese tiene raices complejas, entonces nos aseguramos de dejarlo expresado como un la transformada de algún seno y coseno, aplicando el primer teorema de traslación.

$$\Rightarrow \sin(t)e^{2t}$$

Entonces, finalmente:

$$y(t) = \left(x(t) * (\sin(t)e^{2t})\right)(t)$$

Donde:

$$x(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } 0 < t < 1 \\ 1 + e^{-t} \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

Como podemos dejarlo así, nos ahorramos cuentas al pedo si nos poniamos a buscar la antitransformada de eso. Así que: Deal with it.

3) a) Dado el sistema ortonormal en el intervalo $[0;\pi]$: $\{\frac{1}{\sqrt{2}}; cos(2nx); sen(2nx)\}$ y la función $f(x) = x^2$ si $0 < x < \pi$, diga a que función (definida en el eje real) converge la correspondiente Serie de Fourier: i) en el sentido de la convergencia cuadrática ii) en el sentido de la convergencia puntual iii) ¿puede asegurar la convergencia uniforme de la serie? b) Obtenga el desarrollo en Serie de Fourier de cosenos para la función dada y diga a que función (definida en el eje real) converge la correspondiente Serie de Fourier: i) en el sentido de la convergencia cuadrática ii) en el sentido de la convergencia puntual iii) ¿puede asegurar la convergencia uniforme de la serie? c) Utilice el desarrollo obtenido en b) para obtener el valor de $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ y el de $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$.

a) Dado que tenemos la Serie Trigonométrica, hay que tener en cuenta que en este período la función no será continua en toda la recta (presenta discontinuidades de salto en $k\pi$.

i) Convergencia Cuadratica: Si recordamos la definicion de eso, es que cuanto mayor sea el valor de N en la serie, es decir, cuantas sumas hagamos, mas se va a aproximar la serie a la funcion. Como aca siempre definimos la Serie de Fourier como una suma infinita, podemos decir que va a converger a f(x), aproximandose mucho (?). En las partes donde no es continua (como ser en $x = \pi$ y $x = -\pi$), va a converger a la semisuma.

ii) Convergencia Puntual: Para todo x donde la función sea continua ($x \neq k\pi$) la serie convergerá a $f(x)$ puntualmente. En $x = k\pi$ la serie convergerá a la semisuma de los límites laterales de la función, por ende a $\frac{\pi^2}{2}$.

iii) Convergencia Uniforme: Si recordamos de la definición, se tiene que cumplir que $f(-\pi) = f(\pi)$, entre otras cosas. En este caso justo eso no se cumple, porque ahí la función es discontinua. Entonces no se garantiza la convergencia uniforme de la serie. Para el intervalo $(0;\pi)$ la serie converge uniformemente, pero no para los extremos.

b) Acá nos piden la Serie de Fourier de Cosenos, por lo tanto nos estan pidiendo una extensión PAR. Por lo tanto, si la dibujamos, vemos que tenemos parabolas que se repiten, y queda todo continuo!

La serie la calculamos como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

(Dado que ahora el período de la función es 2π. Como no nos importa exponerlo en función de la base dada, lo hacemos como nos gusta a nosotros directamente (y en todo caso, si tuvieramos que cambiarlo, se puede hacer luego multiplicando y dividiendo por la norma). Pero incluso, dado que ahora estamos en otro *espacio* pues cambiamos el período, esa base ya no tiene *perfecta validancia* :P. Haciendo cuentas sale que:

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi$$

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Entonces:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

i) Convergencia Cuadratica: Idem a)

ii) Convergencia Puntual: La serie converge a $f(x)$ en donde ésta es continua, en este caso, para todo x.

iii) Convergencia Uniforme: Si recordamos de la definición, se tiene que cumplir que $f(-\pi) = f(\pi)$, entre otras cosas. En este caso justo eso SI se cumple, porque ahí la función es continua. Entonces esta serie de fourier converge uniformemente a $f(x)$.

c) Teniendo en cuenta los valores de la función, decimos:

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

4) En un bloque sólido que ocupa la región $A = \{(x, y, z)/y > 0; 0 <= x <= a\}$, fluye calor en régimen permanente en dirección paralela al plano $z = 0$. La temperatura en la pared $y = 0$ es $f(x)$, mientras que sus otras caras se mantienen en 0. Halle la temperatura $u(x, y, z)$ en cada punto del sólido en función de $f(x)$ siendo ésta la función del ejercicio 3). (NO CALCULE LOS COEFICIENTES DE LA SOLUCIÓN PERO INDIQUE LAS FÓRMULAS PARA SU CÁLCULO)

Hay que resolver la ecuación de Laplace en el plano para $(x, y)/0 < x < a; y > 0$. Recordamos la ecuación de Laplace:

$$\nabla u(x, y) = u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0 \tag{23}$$

Planteamos como siempre:

$$u(x, y) = \chi(x)\gamma(y)$$

$$\rightarrow \chi''(x)\gamma(y) = -\chi(x)\gamma''(y)$$

Dividiendo miembro a miembro con $u(x, y)$:

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = -\frac{\gamma''(y)}{\gamma(y)} = -\lambda^2$$

Tenemos las ecuaciones separables, como ya fue explicado varias veces:

$$\begin{cases} \chi''(x) + \lambda^2 \chi(x) = 0 \to \chi(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \quad (A, B \in \mathbb{R}) \\ \gamma''(y) - \gamma(y) = 0 \to \gamma(y) = Ce^{-\lambda y} + De^{\lambda y} \quad (C, D \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Dado que la función $u(x, y)$ debe ser una función acotada, e $y > 0$, D debe valer 0. Como $u(0, y) = 0 \to \chi(0) = 0 \to A = 0$. Como $u(a, y) = 0 \to \chi(a) = 0 \to \lambda = \dfrac{n\pi}{a}$.

$$\Rightarrow u(x, y) = B' \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{\frac{n\pi}{a}y}$$

$$u(x, 0) = B' \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = f(x)$$

Mismo chamuyo de siempre: no podemos usar un simple seno, necesitamos una serie infinita de ellos, entonces:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{\frac{n\pi}{a}y}$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = f(x)$$

$$b_n = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

Y esa es la solución.

5) ¿Puede ser $m(x, y) = e^{3x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\cos(3y) + \frac{y}{x^2+y^2}\sin(3y)\right)$ la parte real del potencial complejo de un cierto campo vectorial?. En caso afirmativo:
a) Halle dicho potencial complejo.
b) Indique la ecuación de las líneas de flujo y las equispotenciales.
c) Explique por qué dichas curvas son ortogonales.

Este ejercicio es Idéntico al **ejercicio 5 del final del 04/07/2012 (sección 2)**. En este caso, no tiene el punto d, pero el resto son iguales.

6. Final 07/08/2012

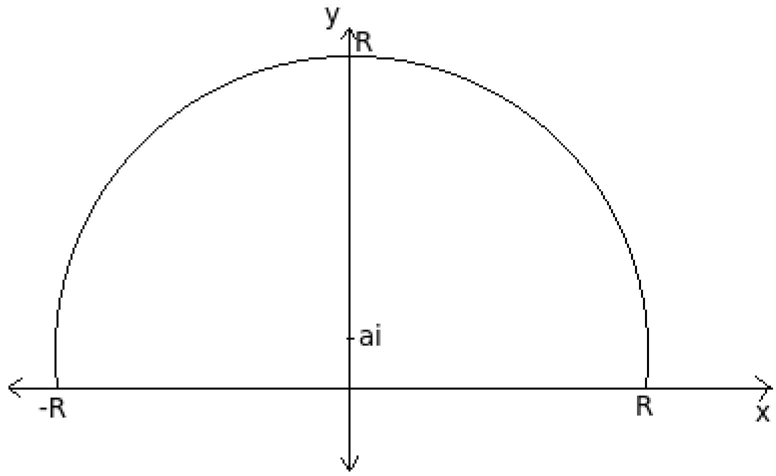
1) a) Utilice la definición de transformada de Fourier para calcular la transformada de Fourier de $\frac{1}{x^2+a^2}$ con $a > 0$.
b) Hallar la función $y(t)$ de modo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^2+1} d\tau = \frac{1}{t^2+4}$$

a) Siendo $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, vamos a la definción de la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2} e^{-i\omega x} dx$$

Acá no queda otra, hay que arremangarse e integrar a lo macho (?). Hay que usar el teorema de los residuos:



$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2}, z = ai\right) = \frac{\pi e^{\omega a}}{a}$$

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2} dx + \int_{C_R} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2} dz$$

Vemos que la segunda integral converja a 0:

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2} dz\right| \le \int_{C_R} \frac{|e^{-i\omega z}|}{|z^2+a^2|} |dz| = \int_{C_R} \frac{|e^{i\omega x}|\,|e^{y\omega}|}{|z^2+a^2|} |dz| \le \int_{C_R} \frac{|e^{y\omega}|}{|z|^2-a^2} |dz|$$

Por lo tanto, como $y > 0$, para que la integral converja $w \le 0$. De esta manera, $|e^{y\omega}|$ queda acotado por 1:

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2} dz\right| \le \int_{C_R} \frac{1}{|z|^2-a^2} dz = \frac{\pi R}{R^2-a^2} \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \left|\int_{C_R} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2} dz\right| = 0$$

Finalmente, para $\omega \leq 0$:

$$F(w) = \frac{\pi e^{a\omega}}{a}$$

Ahora bien, para ver qué nos da con $\omega > 0$, tendríamos que agarrar la curva de abajo, y ver que nos va a dar algo muuuuuy parecido. En particular, prefiero utilizar un teorema que involucra la pariedad de una función con la de su transformada de Fourier.

Teorema: Sea $f(t)$ una función tal que $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$, si $f(t)$ es par, entonces $F(\omega)$ también lo es. Si $f(t)$ es impar, entonces $F(\omega)$ también lo es.

La demostración es sencilla y sale de la definición, y mucho sentido no tiene la verdad. Dado que justamente nuestra función es par, podemos decir:

$$F(\omega) = \frac{\pi e^{-a|\omega|}}{a}$$

b) Uno ve ese bicho feo mal parido de ahí y no sabe qué hacer tal vez, pero vamos a separarlo un poco para que quede más *lindo*. Si te fijás bien esto es una simple convolución. Por si no se vé a simple viste, lo retocamos. Para esto defino $g(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^2+1} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \frac{1}{(t-\tau)^2+1} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) g(t-\tau) d\tau = (y * g)(t)$$

$$\rightarrow (y * g)(t) = \frac{1}{t^2+4} = h(t)$$

Okey, lo dejamos más entendible, pero a priori parece complicado definir una función que cumpla ello. Pero conociendo la propiedad de la transformada de Fourier de la convolción, y además ya conociendo la TF de $g(t)$ y $h(t)$, que ya nos permite tener una ventaja por ese lado. Recordar:

$$\mathcal{F}\{(x * y)(t)\} = \mathcal{X}(\omega)\mathcal{Y}(\omega)$$

Entonces aplicamos la transformada:

$$\mathcal{F}\{(y * g)(t)\} = \mathcal{Y}(\omega)\mathcal{G}(\omega) = \mathcal{H}(\omega)$$

Ver que $g(t)$ es la función a la que le calculamos la transformada en a) para $a = 1$, y $h(t)$ también lo es, pero para $a = 2$, entonces:

$$\mathcal{Y}(\omega)\pi e^{-|\omega|} = \frac{\pi e^{-2|\omega|}}{2} \rightarrow \mathcal{Y}(\omega) = \frac{e^{-|\omega|}}{2}$$

Finalmente, la función que se nos pide será:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t^2+1}$$

2) a) Estableciendo las hipótesis necesarias, demuestre la propiedad que permite calcular la transformada de Laplace de una función periódica de período $2T$.
b) Si la siguiente proposición es verdadera, demuéstrela. Si es falsa dé un contraejemplo. S̈i $f(t)$ es continua por partes y no es de orden exponencial, su Transformada de Fourier no existe.
c) Utilice la transformada de Laplace para resolver:

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \int_0^t x(m)\sin(t-m)dm \\ x'(t) + 2x(t) = H(t) \end{cases}$$

Con $y'(0) = y(0) = x(0) = 0$ y $H(t)$: la función de Heavside.

a) Bueno para demostrar esto vamos a tener que ir a la definición de la transformada de Laplace. Para esto, sea $f(t)$ tal que $f(t) = f(t + K2T)$ $(K \in \mathbb{N})$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^{2T} f(t)e^{-st}dt + \int_{2T}^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Vamos con la segunda integral para dejarla un poco mejor, aplicando el cambio de variables $t = u + 2T(du = dt)$:

$$\int_{2T}^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(u+2T)e^{-s(u+2T)}du = e^{-s2T}\int_0^\infty f(u)e^{-su}du$$

Reemplazamos en la igualdad anterior, cambiando u por t, sin perder generalidad, pero para tener todo en la misma variable de integración:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^{2T} f(t)e^{-st}dt + e^{-2Ts}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\left(1 - e^{-2Ts}\right)\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^{2T} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-2Ts}}\int_0^{2T} f(t)e^{-st}dt$$

Y bueno, esa es la propiedad.

b) La respuesta es "verdadero". Todavía falta ver, pero la idea sería demostrar que si no es de orden exponencial, no tiene transformada, o sino mejor, que si tiene transformada, es de orden exponencial. **Lo dejo para ver luego**.

c) Aplicamos la Transformada al sistema:

$$\begin{cases} s^2\mathcal{Y}(s) + 3s\mathcal{Y}(s) + 2\mathcal{Y}(s) = \mathcal{X}(s)\frac{1}{s^2+1} \\ s\mathcal{X}(s) + 2\mathcal{X}(s) = \mathcal{L}\{H(t)\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{Y}(s) = \frac{\mathcal{X}(s)}{(s^2+1)(s^2+3s+2)} \\ \mathcal{X}(s) = \frac{\mathcal{L}\{H(t)\}}{s+2} \end{cases}$$

Vale aclarar que al transforamada del seno la conocemos. Aplicar la propiedad demostrada en a) no tiene sentido, porque habría que calcular una integral con $\sin(t)e^{-st}$, algo no muy amigable, y en realidad esa transformada no las vamos a tener que acordar de todos modos.
Para $t < 0$ se puede ver que al segunda ecuacion da que $x(t) = 0$, y luego lo mismo para $y(t)$. Sucede que si lo resolvieramos como lo hicimos tantas veces en Álgebra II o Análisis Matemático II, nos quedaría como solución: $x(t) = Ce^{-2t}$. Ahora, para que se cumpla que $x(0) = 0 \to C = 0 \to x(t) = 0$. Simplemente quería dejar esa acotación para mostrar que lindo es cuando todo cierra :P. Volviendo al problema, ahora nos enfocamos para el problema en $t > 0$:

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{X}(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1/2}{s} + \frac{-1/2}{s+2} \to x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t}$$

Ahora bien, nos queda $y(t)$, que la verdad va a quedar horrible, porque va a tener 4 raices complejas, y 2 reales, por lo que no va a ser sencillo y nada lindo calcular eso. Por lo tanto, lo dejo expresado y me doy por hecho, asumo que el corrector se dará cuenta que entendí el tema dejándolo así.

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+1)\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}$$

E $y(t)$ lo calcula Magoya. Daniel Prélat Dixit.

3) a) Una función $f : [0, 2T] \to \mathbb{R}$ cumple: $f(x) = -f(2T - x)$ (simetría impar de media onda). Demuestre que su serie de Fourier de cosenos en dicho intervalo tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2T} x\right) \qquad \text{Donde} \qquad a_{2n+1} = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2T}x\right) dx$$

b) Utilice el resultado en a) para obtener la serie de Fourier trigonométrica de cosenos de $\begin{cases} -x & \textbf{si } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \textbf{si } 1 < x < 2 \end{cases}$ y diga a qué función (definida en el eje real) converge la correspondiente serie de Fourier i) en el sentido de la convergencia cuadrática (diga cuál es el sistema ortonormal utilizado) ii) en el sentido de la convergencia puntual iii) ¿Puede asegurar la convergencia uniforme de la serie?

a) Por una simple conveniencia de notación defino:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } 0 < x < T \\ -g(2T - x) & \text{si } T < x < 2T \end{cases} \qquad g : [0; T] \to \mathbb{R}$$

Cabe destacar, que dada la definición de $f(x)$, la función f nunca será continua en $x = T$ a menos que $f(T) = 0$. Obtenemos el desarrollo para demostrar lo pedido:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{4T}x\right)$$

Dada la simetría del problema, podemos asegurar que, indistintamente de la función f dada, a_0 valdrá 0:

$$a_0 = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} f(x)dx = \frac{1}{2T}\left[\int_0^T f(x)dx + \int_T^{2T} f(x)dx\right] = \frac{1}{2T}\left[\int_0^T f(x)dx + \int_T^{2T} -f(2T-x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2T}\left[\int_0^T f(x)dx - \int_0^T f(t)dt\right] = 0$$

Además, si se hace un dibujo, se ve claro que el valor medio de la función es 0. Pasamos a calcular los a_n:

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2T}x\right) dx = \frac{1}{T}\left[\int_0^T g(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2T}x\right) dx + \int_T^{2T} -g(2T-x)\cos\left(\frac{n\pi}{2T}x\right) dx\right]$$

Trabajamos con el segundo término, planteando el cambio de variable $y = 2T - x \to dx = -dy$:

$$\int_T^{2T} -g(2T-x)\cos\left(\frac{n\pi}{2T}x\right)dx = \int_T^0 g(y)\cos\left(\frac{n\pi}{2T}(y+2T)\right)dy = -\int_0^T g(y)\cos\left(\frac{n\pi}{2T}y + n\pi\right)dy$$

$$= -\int_0^T g(y)\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2T}y\right)\cos(n\pi) + \sin\left(\frac{n\pi}{2T}y\right)\sin(n\pi)\right)dy = -(-1)^n\int_0^T g(y)\cos(\frac{n\pi}{2T}y)dy$$

Reemplazando en la igualdad anterior:

$$a_n = \frac{1}{T}\left[\int_0^T g(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2T}x\right)dx - (-1)^n\int_0^T g(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2T}x\right)dx\right] = \frac{1}{T}(1-(-1)^n)\int_0^T g(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2T}x\right)dx$$

Por lo tanto, si n es par, a_n valdrá 0. En el caso impar:

$$a_{2n+1} = \frac{2}{T}\int_0^T g(x)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2T}x\right)dx = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2T}x\right)dx$$

Quedando la serie como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2T}x\right)$$

Quedando demostrado lo pedido.

b) Nos dan una función que cumple con la propiedad de la función f del punto a) (obviamente, como debía pasar). Aplicamos la propiedad para obtener el desarrollo, sabiendo que $T = 1$:

$$a_{2n+1} = 2\int_0^1 (-x)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)dx =$$

$$a_{2n+1} = -2\left(\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)\Big|_0^1 + \frac{2}{(2n+1)\pi}x\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)\Big|_0^1\right)$$

$$a_{2n+1} = \frac{-8}{(2n+1)^2\pi^2}\left(\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right) + \frac{-4}{(2n+1)\pi}\left(\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) - 0\sin(0)\right)$$

$$a_{2n+1} = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} - \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi}$$

Entonces el desarrollo quedará:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} - \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi}\right)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)$$

i) **Lo dejo para completar para cuando estemos más seguros.**
ii) La función a la que converge será:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } 2k < x < 2k+1 \\ 2-x & \text{si } 2k-1 < x < 2k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{si } x = 2k+1 \end{cases}$$

iii) No se puede asegurar, pues aunque la $f(0) = f(2)$ y $f'(x)$ sea continua a trozos, la función $f(x)$ no es continua en el intervalo $[0; 2]$.

4) En una barra aislada lateralmente ubicada en el intervalo $[0; 1]$ sobre el eje x, fluye el calor mientras se mantiene aislado su extremo izquierdo y el derecho se mantiene a $0°C$. Si la temperatura inicial de la barra es la función $f(x) = -x$, calcule la distribución del calor en la barra sabiendo que $k = 1$. (NOTA: tenga en cuenta el ej 3).

Vemos cuáles son las condiciones:

$$u'_t(x,t) = u''_{xx}$$

$$u(1,x) = 0 \quad u'_x(0,t) = 0 \quad u(x,0) = -x$$

La segunda es la condición equivalente a *aislado*. Resolvemos como siempre:

$$u(x,t) = \chi(x)\tau(t)$$

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} \chi''(x) + \lambda^2\chi(x) = 0 & \rightarrow \chi(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \\ \tau'(t) + \lambda^2\tau(t) = 0 & \rightarrow \tau(t) = Ce^{-\lambda^2 t} \end{cases}$$

Ahora vemos las condiciones de contorno. La primera, la del lado izquierdo. Como la derivada en 0 debe valer 0, en este caso será B quien valga 0 (a diferencia de los otros casos).

$$u'_x(0,y) = 0 \rightarrow \chi'(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$u(1,y) = 0 \rightarrow \chi(1) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2n-1}{2}\pi n$$

$$u_n(x,t) = A'\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi n x\right)e^{(\frac{2n-1}{2}\pi n)^2 t}$$

La condición inicial debe cumplirse:

$$u(x,0) = A'\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi n x\right) = -x$$

Pasamos a la serie, en este caso con extensión par.. mismo chamuyo de siempre:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi n x\right)e^{(\frac{2n-1}{2}\pi n)^2 t}$$

Y como vemos, da la misma expresión que en el punto 3, por lo que los a_n serán exactamente esos, y como ya los calculamos, los dejamos así :P.

7. Final 13/12/2012

1) Suponiendo conocida la Transformada de Fourier de $f(t) = \frac{1}{t^2+4}$, calcule en función de ella la Transformada de Fourier de $g(t) = \frac{2t+3}{t^2-2t+5}$.

Vemos que es el mismo al **ejercicio 1 del final del 04/07/2012**, pero la tenemos más linda aún:

$$f(t-1) = \frac{1}{(t-1)^2+4} = \frac{1}{t^2-2t+5}$$

Por lo tanto:

$$g(t) = (2t+3)\frac{1}{t^2-2t+5} = (2t+3)f(t-1) = 2tf(t-1) + 3f(t-1)$$

Aplicamos la Transformada de Fourier a $g(t)$:

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{2tf(t-1)\} + \mathcal{F}\{3f(t-1)\}$$

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = 2\mathcal{F}\{tf(t-1)\} + 3\mathcal{F}\{f(t-1)\}$$

Recordemos unas propiedades importantes de la Transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = F\left(\omega\right)e^{-i\omega t_0} \tag{24}$$

$$\mathcal{F}\{(-it)^n f(t)\} = \frac{\partial^n F\left(\omega\right)}{\partial \omega^n} \tag{25}$$

Entonces:

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = 2i\mathcal{F}\{(-it)^1 f(t-1)\} + 3\mathcal{F}\{f(t-1)\}$$

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = 2i\left(\frac{\partial^1\left(F\left(\omega\right)e^{-i\omega 1}\right)}{\partial \omega^1}\right) + 3F(\omega)e^{-i\omega 1}$$

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = 2i\left(e^{-i\omega}\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega} - iF(\omega)e^{-i\omega}\right) + 3F(\omega)e^{-i\omega}$$

Finalmente:

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = 2ie^{-i\omega}\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega} + 5F(\omega)e^{-i\omega}$$

Donde $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$

2) a) Hallar el desarrollo en serie de Fourier exponencial de:

$$f(t) = \begin{cases} \pi - x \text{ si } 0 < x < \pi \\ 0 \text{ si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

b) A partir del desarrollo obtenido en a) obtenga el desarrollo en serie de Fourier trigonométrico válido en dicho intervalo. c) Escriba la identidad de Parseval para cada uno. d) Usar los puntos anteriores para mostrar que:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{13}{384}\pi^4$$

Con Martín vimos que era más fácil calcular primero la trigonométrica y a partir de ella sacar la exponencial. Así que voy a hacer eso:

b) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$
Con $L = 2\pi$ en nuestro caso.
Calculamos a_0:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \text{cuentas boludas} = \frac{\pi}{2}$
Calculamos a_n:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\pi\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx - \int_0^{\pi}x\cos(nx)\,dx\right)$$

Cuentas + tabla de integrales (?):

$$a_n = -\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

Si n es impar, el parentesis vale -2

$$a_{2n-1} = \frac{2}{\pi(2n-1)^2}$$

Para b_n:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\pi\int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx - \int_0^{\pi} x\sin(nx)\, dx\right)$$

Cuentas + tabla de integrales (?):

$$b_n = \frac{1}{n}\left(-(-1)^n + 1 + (-1)^n\right)$$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

(n par o impar, no importa en ese caso)

La serie finalmente nos queda:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(nx) + \frac{1}{n}\sin(nx)$$

Ahora para responder a), paso a forma exponencial, recordando que:

$$\cos(ax) = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}$$

$$\sin(ax) = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}$$

Entonces, para el término n-ésimo de la serie queda:

$$a_n\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} = C_n \\ \frac{a_n + ib_n}{2} = C_{-n} \end{cases}$$

Quedando la serie exponencial:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi(2n-1)^2} - \frac{i}{2n}\right)e^{inx} + \left(\frac{1}{\pi(2n-1)^2} + \frac{i}{2n}\right)e^{-inx}$$

Si nos fijamos bien, entre un término y otro hay muy poca diferencia, y el signo (-) que los diferencia aparecería solo al ser n negativo, llegado el caso. Entonces:

$$f(x) = \frac{\pi}{4}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi(2|n|-1)^2} - \frac{i}{2n}\right)e^{inx}$$

c) Recordemos la identidad de Parseval:

Para la forma trigonométrica:

$$\frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

Para la forma exponencial:

$$\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

Donde T es el periodo.

Para nuestro caso:

Para la forma trigonométrica:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

Para la forma exponencial:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi(2|n|-1)^2} - \frac{i}{2n}\right)^2$$

d) Nos dan la siguiente sumatoria:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

La convertimos a esto, que es lo mismo:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ahora nos fijamos, en la trigonometrica, que es mas facil:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x) + \frac{1}{(2n-1)} \sin((2n-1)x)$$

Tenemos que sacarnos de encima el seno, de modo que de 0, y el coseno queremos que de 1. Esto pasa si $x = 0$:

$$f(0) = \frac{f^+(0) + f^-(0)}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Para la otra:

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{13}{384}\pi^4$$

Para este utilizamos la identidad de Parseval (obviamente para la serie trigonométrica). Vemos que directamente nos queda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \left(||f||^2 - \frac{\pi^2}{8} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) \frac{\pi^2}{4}$$

Asumo que un dato del examen era esa sumatoria, que su valor debe ser $\frac{\pi^2}{6}$. Calculámos el valor de la norma cuadrada de $f(x)$:

$$||f||^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)^2 dx = \text{Cálculos sencillos} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{6} \right) \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^4}{96} = \frac{4}{384}\pi^4$$

Como vemos este valor, aunque cercano, no comprueba lo pedido. Ahora, podríamos dudar de la capacidad matemática de quién hace los exámenes, pues ya ha sucedido que en uno se ha olvidado de algún que otro diferencial en una integral (ese tipo de cosas por las que te expulsan de nuestra facultad). Entonces vamos al querido **Wolfram Alpha** y buscamos la solución al problema, que efectivamente es $\frac{\pi^4}{96}$, así que todos contentos :-).

3) a) Defina producto de convolución de dos funciones $x(t)$ e $y(t)$ definidas en $(-\infty, +\infty)$. Escriba la expresión de dicho producto si $x(t) = y(t) = 0$ para $t < 0$ (funciones causales). Justifique.
b) Demuestre que si las funciones f y g son continuas por partes de orden exponencial, el producto convolución de ambas también lo es.
c) Estableciendo hipótesis necesarias, demuestre la propiedad que permite obtener la transformada de Laplace del producto de convolución de dos funciones causales en función de las transformadas de Laplace de cada una de dichas funciones.

a) y c) Ya lo hicimos en el **ejercicio 4/a) y b) del Final 09/02/2012 (sección 1)**

b) Para realizar esta demostración podemos ir por dos caminos, ambos muy sencillos. Empezamos por el más sencillo y más interesante:
Resolviendo c) antes que b), podemos demostrar que para dos funciones cuyas Transformadas de Laplace existen (ergo, son de orden exponencial) se puede calcular la transformada de Laplace

de su convolución a partir de sus transformadas. Pero si justamente esta transformada existe, Debe si o si ser de orden exponencial, como cualquier función a la que se le puede calcular la transformada de Laplace.
Este chamuyito debería ser suficiente, pero si pareciera *imprudente* poder perder puntos fáciles utilizando el punto c) para resolver el b) (aunque el profesor que hace los finales ya demostró que a veces hay que tener en cuenta los ejercicios posteriores para encarar de mejor forma los anteriores), lo hacemos acotando:
Sabemos, ya que son de orden exponencial, que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ se las puede acotar por susodichas funciones exponenciales:

$$x(t) \leq M_1 e^{c_1 t} \qquad y(t) \leq M_2 e^{c_2 t}$$

Planteamos la convolución para el caso de funciones causales:

$$(x * y)(t) = \int_0^t x(u)y(t-u)du \leq \int_0^t M_1 e^{c_1 u} M_2 e^{c_2(t-u)} du = M_1 M_2 e^{c_2 t} \int_0^t e^{c_1 u} e^{-c_2 u} du$$

$$(x * y)(t) \leq M_1 M_2 e^{c_2 t} \int_0^t e^{(c_1 - c_2)u} du = \frac{M_1 M_2}{c_1 - c_2} e^{c_2 t} \left(e^{(c_1 - c_2)t} - 1 \right) = M_1 M_2 \left(\frac{e^{c_1 t}}{c_1 - c_2} + \frac{e^{c_2 t}}{c_2 - c_1} \right)$$

Estamos hablando de una combinación de funciones de orden exponencial, por ende claramente es una función de orden exponencial (pues existirá alguna función exponencial que será mayor a la función). Dado que la convolución queda acotada por una función exponencial, está claro que justamente es de orden exponencial.

4)a) Explique como resolvería el siguiente problema de valores iniciales no homogénea: $\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + g(x) & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = A & u(\pi,t) = B \quad u(x,0) = f(x) \end{cases}$
Explique que es el régimen permanente y el transitorio e identifíquelos en el problema anterior.
b) Particularice para $g(x) = x^2, A = 1, B = 2$**. No calcule coeficientes de Fourier pero deje indicadas las fórmulas correspondientes para obtenerlas.**

a) Tenemos que pensar un poco. Separación de variables no vamos a lograr. Podríamos intentar por Fourier, pero creo que no sale. Si recordamos bien, cuando teniamos un caso no homogeneo, separabamos en parte homogenea y particular: $u(x,t) = \delta(x,t) + w(x)$.

Donde ambas funciones $\delta(x,t)$ (que es la solución diferencial/transitoria) y $w(x)$ (que es la solución particular/estacionaria) son funciones que cumplen con la ecuación diferencial. Vamos a ver primero qué sucede con la solución estacionario:

$$w'_t(x) = 0 = w''_{xx} + g(x) \to w(x) = \int \int -g(x)dxdx + Cx + D$$

Donde C y D son tales que $w(0) = 0$ y $w(\pi) = B$.
Ahora bien, si nos pusieramos a trabajar con $\delta(x,t)$ en la ecuación diferencial, tendríamos un pequeño problema porque la $g(x)$ estaría allí para molestarnos. Más sencillamente, volvemos a plantear la ecuación diferencial para la función $u(x,t)$:

$$\delta'_t(x,t) + w'_t(x) = \delta'_t(x,t) = \delta''_{xx}(x,t) + w''_{xx}(x) + g(x)$$

Como ya vimos: $w''(x) = -g(x)$, Por lo tanto:

$$\delta'_t(x,t) = \delta''_{xx}(x,t)$$

Quedando la ecuación diferencial que tanto nos gusta, pudiendo separar variables como siempre y toda la bola.

b) Ahora nos ponemos a resolver en serio:

$$w(x) = -\frac{x^4}{12} + Cx + D$$

Dado que $w(0) = 1 \to D = 1$. Como $w(\pi) = 2 \to 2 = -\frac{\pi^4}{12} + C\pi + 1 \to C = \frac{1+\frac{\pi^2}{12}}{\pi}$.

$$w(x) = -\frac{x^4}{12} + \left(\frac{1+\frac{\pi^4}{12}}{\pi}\right)x + 1$$

Entonces, ahora nos resta resolver la ecuación para $\delta(x,t)$, que era la solución homogenea:

$$\delta'_t(x,t) = \delta''_{xx}(x,t)$$

Separamos variables, $\delta(x,t) = \chi(x)\tau(t)$, etc, y llegamos a estas dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \chi''(x) + \lambda^2\chi(x) = 0 & \to \chi(x) = E\cos(\lambda x) + F\sin(\lambda x) \\ \tau'(t) + \lambda^2\tau(t) = 0 & \to \tau(t) = Ge^{-\lambda^2 t} \end{cases} \qquad (E, F, G \in \mathbb{R})$$

Aplicamos condiciones de borde homogeneas:

$$\delta(0,t) = 0 \to \chi(0) = 0 = E\cos(0) + F\sin(0) \to E = 0$$

$$\delta(\pi,0) = 0 \to \chi(\pi) = 0 = B\sin(\lambda\pi) \to \lambda = n$$

Finalmente, nos queda:

$$\delta_n(x,t) = B'\sin(nx)e^{-n^2 t}$$

Nos falta la condición inicial:

$$\delta(x,0) = f(x) - w(x) = B'\sin(nx)$$

Lo pasamos a serie, justificando en el final (?):

$$\delta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx)e^{-n^2 t}$$

Entonces:

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x) - w(x))\sin(nx)dx$$

Entonces, la respuesta final final es, reemplazando $\delta(x,t)$ y $w(x)$ arriba de todo:

$$u(x,t) = \left(\sum_{1}^{\infty} B_n \sin(nx) e^{-n^2 t}\right) + \left(-\frac{x^4}{12} + \left(\frac{1}{\pi} + \frac{\pi^3}{12}\right) x + 1\right)$$

Con:

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(x) - \left(-\frac{x^4}{12} + \left(\frac{1}{\pi} + \frac{\pi^3}{12}\right) x + 1\right)\right) \sin(nx) dx$$

Y te dejo el placer de calcularlos :-)

Faltó explicar hasta acá qué es el régimen transitorio y qué el permanente. El Régimen transitorio es la parte de la solución que depende del tiempo, y el régimen permanente el que no. En particular suele suceder que llegado a un tiempo $t = t_0$ la solución ya no depende de t, quedando la solución directaente igual a la permanente/estacionaria (por eso tal nombre). Por lo tanto, en este caso en particular, la parte transitoria es $\delta(x,t)$ y la permanente $w(x)$.

5) ¿Puede ser $m(x,y) = e^{3x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\cos(3y) + \frac{y}{x^2+y^2}\sin(3y)\right)$ **la parte real del potencial complejo de un cierto campo vectorial?. En caso afirmativo:**
a) Halle dicho potencial complejo.
b) Indique la ecuación de las líneas de flujo y las equispotenciales.
c) Explique por qué dichas curvas son ortogonales.
d) Si Γ es una curva cerrada simple, calcule todos los valores posibles que puede tomar la circulación y el flujo de dicho campo vectorial sobre Γ.

Idéntico al **ejercicio 5 del final del 04/07/2012**.

8. Final 19/12/2012

2) a)Enuncie el teorema que permite representar una función $f : \Re \to \Re$ mediante una integral doble iterada (Teorema de la integral de Fourier). Indique la transformada y antitransformada de Fourier de f.

b) Halle la transformada de Fourier de $f(t) = \begin{cases} e^t & \textbf{si } x < -1 \\ 1 & \textbf{si } 1 < x < -1 \\ e^{-t} & \textbf{si } x > 1 \end{cases}$

c) Escriba la antitransformada de Fourier correspondiente al punto anterior. Indique a que función converge.

d) Utilizando dicha transformada verifique que: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{sin(x)}{1+x^2} dx$

Ayuda: $\int e^{au} cos(bu) du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(acos(bu) + bsin(bu)) + C$

$\int e^{au} sin(bu) du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(acos(bu) - bsin(bu)) + C$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(x)}{x} dx = \pi$

a) Segun el teorema integral de Fourier:

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w)cos(wx) + B(w)sin(wx)dw$$

Con $A(w)$ y $B(w)$ definidas como:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)cos(wx)dx$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)sin(wx)dx$$

Aca no se si piden que defina transformada y antitransformada de fourier o que indique donde esta en la deducción, ya que lo primero lo sabemos todos muestro lo segundo.
El teorema anterior se demuestra partiendo de la antitransformada de Fourier de la siguiente forma:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$$

Donde $F(w)$ es la transformada de Fourier definida como:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$$

b)
Si graficamos la función se ve claramente que es par, por lo tanto podemos hacer lo siguiente:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(cos(wt) - isin(wt))dt = 2\int_0^{\infty} f(t)cos(wt)dt$$

Reemplazamos con la función, como es partida partimos la integral:

$$F(w) = 2\int_0^\infty f(t)cos(wt) = 2\Big(\int_0^1 cos(wt)dt + \int_1^\infty e^{-t}cos(wt)dt\Big)$$

La primer integral sale facil, la segunda esta en la ayuda al final de examen asi que resolviendo llegamos a:

$$F(w) = 2\Big(\frac{cos(w) - wsin(w)}{(1+w^2)e^{-1}} + \frac{sin(w)}{w}\Big)$$

c) Si recordamos que en los puntos de discontinuidad de la funcion la antitransformada vale la semisuma llegamos a:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(w)e^{iwx}dw = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1+e^{-1}}{2} & \text{si } x = 1 \\ e^{-t} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

d) Vemos que nos conviene igualar con $t = 0$

$$f(0) = \frac{2}{2\pi}\Big(\int_{-\infty}^\infty \frac{cos(w) - wsin(w)}{(1+w^2)e^{-1}} + \frac{sin(w)}{w}dw\Big) = 1$$

Por la ayuda sabemos que la integral del segundo término vale π, reemplazamos:

$$\frac{2}{2\pi}\Big(\int_{-\infty}^\infty \frac{cos(w) - wsin(w)}{(1+w^2)e^{-1}}dw\Big) + \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$
$$\frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^\infty \frac{cos(w) - wsin(w)}{(1+w^2)}dw\Big) = 0\cdot e^{-1}$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{cos(w)}{(1+w^2)}dw = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{wsin(w)}{(1+w^2)}dw$$

Se llego a lo pedido.

3) En una cuerda seminfinita ubicada inicialmente sobre el eje x, el extremo izquierdo se puede desplazar verticalmente sobre el eje y, siendo descriptas las sucesivas posiciones sobre el eje y por la función $f(t)$. El movimiento de la cuerda viene descripto por (1) : $\frac{d^2y}{dt^2} = a^2\frac{d^2y}{dx^2}$; (2) $y(0,t) = f(t)$; (3) $y'_t(x,0) = 0$; (4) $f(0) = 0$. Se impone la condición que: (5): $lim_{x\to\infty}y(x,t) = 0$. Utilice la transformada de Laplace para obtener las sucesivas posiciones de la cuerda $y(x,t)$

Aplicamos la Transformada de Laplace respecto de t a la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}\{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\} = \mathcal{L}\{a^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\}$$

$$s^2Y(x,s) - sy(x,0) - y'(x,0) = a^2\mathcal{L}\{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\}$$

En el último término, podemos suponer que la integración y derivación pueden intercambiarse, con lo cual:

$$s^2Y(x,s) - sy(x,0) - u'(x,0) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{y(x,t)\}$$
$$s^2Y(x,s) - sy(x,0) - y'(x,0) = a^2\frac{\partial^2 Y(x,s)}{\partial x^2}$$

Ahora aplicamos las condiciones que nos dieron.

Por 3):

$$s^2Y(x,s) - su(x,0) - 0 = a^2\frac{\partial^2 Y(x,s)}{\partial x^2}$$

Como dice que esta ubicada inicialmente sobre el eje x podemos decir $y(x,0) = 0$:

$$s^2Y(x,s) - s0 = a^2\frac{\partial^2 Y(x,s)}{\partial x^2}$$

Entonces nos queda esta ecuacion diferencial ordinaria, en la variable x:

$$\frac{\partial^2 Y(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s^2}{a^2}Y(x,s) = 0$$

Sabemos que la solución a eso es:

$$Y(x,s) = A(s)e^{\frac{s}{a}x} + B(s)e^{-\frac{s}{a}x}$$

Aplicamos la condicion 5), vemos que el la función tiene que converger a 0 cuando x tiende a infinito. Eso quiere decir que $A(s) = 0$, porque sino se va todo a la mierda.

$$Y(x,s) = B(s)e^{-\frac{s}{a}x}$$

Ahora aplicamos la condición que nos faltaba, la 2):

$$2) y(0,t) = f(t)$$
$$\mathcal{L}\{y(0,t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$
$$Y(0,s) = F(s)$$

$$Y(0,s) = B(s)1 = F(s)$$

Finalmente:

$$Y(x,s) = F(s)e^{-\frac{s}{a}x}$$

Ahora podemos dejarlo así, o si nos queda tiempo y mente, aplicar la Transformada Inversa de Laplace. Recordar el segundo principio de traslación (eso que tenemos ahi con la e):

$$y(x,t) = f(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a})$$

Donde H es la función de Heaviside, y como se ve aca, esta desplazada.

Si $t < \frac{x}{a}$, $y(x,t) = 0$.

Si $t > \frac{x}{a}$, $y(x,t) = f(t - \frac{x}{a})$

9. Final 21/07/2011

1) Sea la elipse $\Gamma : x = acos(\theta)$, $y = bsin(\theta)$. Del resultado de la $\int_\Gamma \frac{1}{z}dz$ demuestre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2cos^2\theta + b^2sin^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}$$

Aca vamos a tener que acordarnos como se hacian las integrales con la parametrización de la curva, por suerte ya nos dan la curva parametrizada y todo asi que es nomas reemplazar.

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}dz = \int_\Gamma \frac{\overline{z}}{|z|^2}dz = \int_\Gamma \frac{x-iy}{x^2+y^2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{acos(\theta) - ibsin(\theta)}{a^2cos^2(\theta) + b^2cos^2(\theta)}d(acos(\theta) + ibsin(\theta)) =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{acos(\theta) - ibsin(\theta)}{a^2cos^2(\theta) + b^2cos^2(\theta)} \cdot (-asin(\theta) + ibcos(\theta))d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{sin(\theta)cos(\theta)(b^2 - a^2) + iab}{a^2cos^2(\theta) + b^2cos^2(\theta)}d\theta$$

Vemos que la parte imaginaria es la que nos estan pidiendo, calculamos la integral por residuos:

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}dz = 2\pi i$$

La integral real da 0 y la imaginaria 2π, igualamos en la ecuación anterior:

$$ab\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2cos^2\theta + b^2sin^2\theta} = 2\pi \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2cos^2\theta + b^2sin^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}$$

2) Sea una función $f : [a, b] \to \Re$. Enuncie condiciones suficientes que permitan afirmar, (en cada uno de los casos siguientes) que:
a) la STF de f existe.
b) la STF de f CV a una función y diga cual es esa función.
c) la STF de f CV uniformemente en dicho intervalo.
d) considere ahora las funciónes:
i) $f : [0, 1] \to \Re / f(x) = x^{2/3}$
ii) $f : [-1, 1] \to \Re / f(x) = x^{2/3}$
iii) $f : [0, 1] \to \Re / f(x) = \begin{cases} x^{2/3} & \textbf{si } x \in [0, 1] \\ -(x)^{2/3} & \textbf{si } x \in [-1, 0] \end{cases}$ y diga en cada caso si puede afirmar que a), b), y c) se contestan en forma afirmativa.

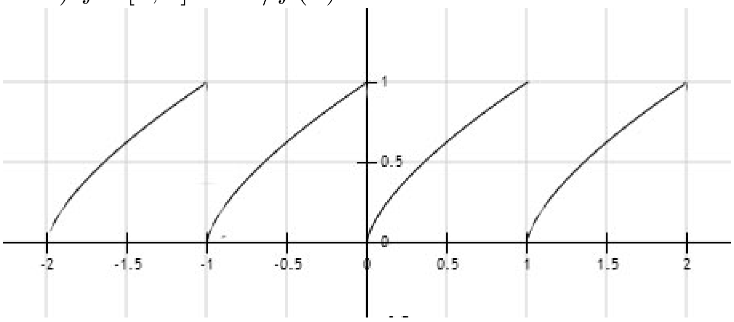
a) Aca nose porque habla especificamente de la serie de fourier trigonometrica, la exponencial se puede deducir de ella y viceversa sin agregar ninguna restriccion por lo que creo que las condiciones no cambian.
Para que una función tenga un desarrollo en serie de fourier la función debe cumplir las condiciones de Dirichlet (copiado del schaum) :

i) f(x) esta definida y univaluada excepto en un numero finito de puntos en $(-L, L)$
ii) $f(x)$ es periodica con periodo 2L
iii) $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas a trozos en $(-L, L)$

b) La serie converge a $\frac{f^-(x_0)+f^+(x_0)}{2}$, si x_0 es un punto de continuidad los limites valen lo mismo, entonces converge a $f(x_0)$

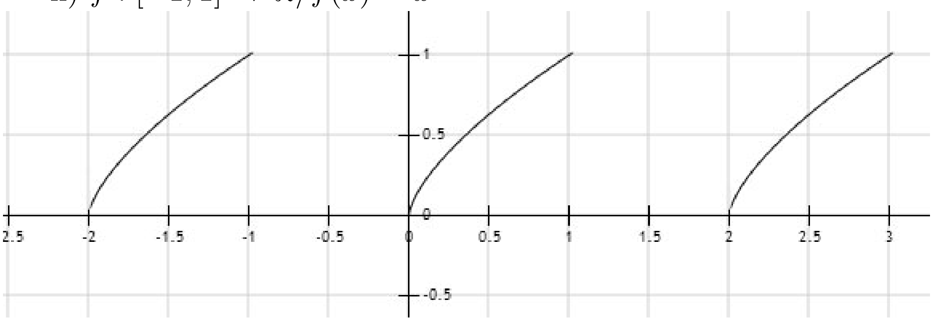
c) Para que la serie converja uniformemente $f(x)$ debe ser continua en $[-Li, Li]$ y tal que $f(-Li) = f(Li)$ y $f'(x)$ continua a trozos con discontinuidades de salto.

i) $f : [0, 1] \to \Re / f(x) = x^{2/3}$



a) La serie existe ya que solo tiene discontinuidades de salto.
b) La serie converge a la función excepto en 0 y 1 donde la serie vale $\frac{1}{2}$
c) La serie no converge uniformemente.

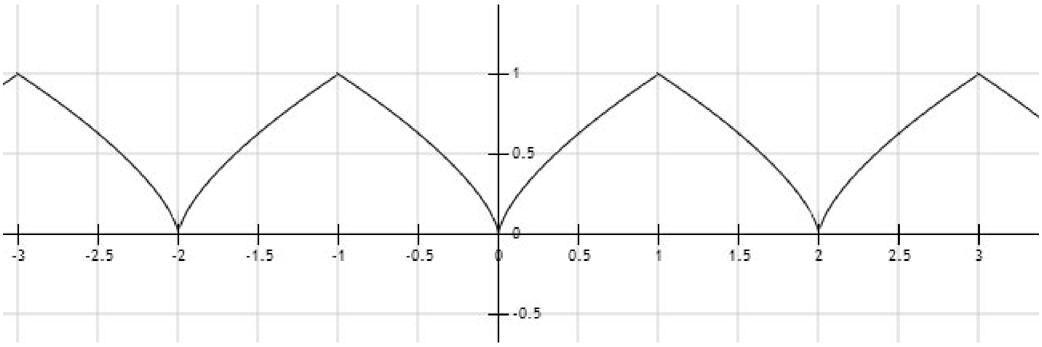
ii) $f : [-1, 1] \to \Re / f(x) = x^{2/3}$



a) La serie existe ya que solo tiene discontinuidades de salto.
b) La serie converge a la función excepto en 1 donde la serie vale $\frac{1}{2}$
c) La serie no converge uniformemente.

iii) Aca supongo que se equivocaron porque si el signo menos esta afuera del parentesis la parte real de la funcion sigue valiendo 0, metiendo el menos adentro parece que da algo de lo que buscaban.

$$f : [0, 1] \to \Re / f(x) = \begin{cases} x^{2/3} & \text{si } x \in [0, 1] \\ -(x)^{2/3} & \text{si } x \in [-1, 0] \end{cases}$$



a) La serie existe, no tiene discontinuidades.
b) La serie converge a la función $\forall x$
c) La serie converge uniformemente ya que la función esta definida en $(-1,1)$ y se cumple que $f(-1) = f(1)$

3) a) Obtenga la TF de $\Re \to \Re / f(x) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } x \in [0,1] \\ 0 & \textbf{si } x \notin [1,0] \end{cases}$ y mediante la correspondiente antitransformada muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin\omega}{\omega} d\omega = \pi$$

Nota: Recuerde que la antitransformada de Fourier es el valor ppal de la integral correspondiente.
b) Obtenga el mismo resultado mediante variable compleja.
c) ¿ Puede afirmar que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{sin\omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

Justifique su respuesta.
a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwt} dt = \int_{0}^{1} e^{-iwt} dt = \left[i \frac{e^{-iwt}}{w} \right] \Big|_0^1 = \frac{ie^{-iw} - i}{w} = \frac{sin(w) + i(cos(w) - 1)}{w}$$

La antitransformada de esta funcion valdra entonces:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(w) + i(cos(w) - 1)}{w} e^{iwt} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,1] \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Como queremos que se cancele el dos de abajo igualamos con $x = 0$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(w) + i(cos(w) - 1)}{w} e^{iw0} dw = \frac{1}{2}$$

Se ve que la parte imaginaria vale 0, luego de algunos simples despejes llegamos a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(w)}{w} dw = \pi$$

b) Por variable compleja hay que acordarnos que como tenemos una singularidad en la recta de integración tenemos que hacer un "saltitoçon otra curva y usar el lema de jordan para calcular la integral de esa curva.

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

La integral de la curva C_R integra a 0, usamos lema de jordan para calcular la integral de la curva chiquita C_r:

$$\int_{C_r} f(z)dz = ik(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Siendo k el residuo en ese punto que es $e^{-iz}|_{z=0} = 1$ por lo tanto $\int_{C_r} f(z)dz = -i\pi$. Llegamos entonces a:

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - i\pi = 2\pi i \sum Res_{int} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x) + isin(x)}{x} dx = i\pi \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{x} dx = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(x)}{x} dx = \pi \end{cases}$$

c) Es verdad ya que $\frac{1}{\omega}$ es una funcion impar al igual que $sin(\omega)$, producto de funciones impares da una funcion par y con una función par se puede:

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz = 2\int_{0}^{R} f(z)dz$$

4) Resolver

$$\begin{cases} u'_t = ku''_{xx} + x^2 \; 0 < x < 2 \; t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 2 \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

Casi identico al problema 4 del final del 13/12/2012

5) Justifique porqué la TL de una función $f(t)$ continua de orden exponencial existe mientras que para la existencia de la TL de su derivada $f'(t)$ solo se requiere que esta sea continua por partes. Demuestre la o las propiedades que utiliza.

Se puede ver en la propiedad de la transformacion de Laplace de una función derivada:

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

Por lo tanto se que ve la TL de una funcion derivada se puede reducir a la TL de la función sin derivar, por lo tanto con que esta función sea de orden exponencial alcanza para que exista la transformación.

10. Final 14/07/2011

1) a) Estudiar la convergencia y calcular para α y $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\beta x)}{x^2+\alpha^2}dx$$

b) Si se acepta que en a) vale que $\frac{\partial}{\partial \beta}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\beta x)}{x^2+\alpha^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\cos(\beta x)}{x^2+\alpha^2}\right]dx$ **deducir que:** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(\beta x)}{x^2+\alpha^2}dx = \pi e^{-\alpha\beta}$

a) Dado que se trata de una serie alternada y acotada sobre una no acotada hacia infinito, por el criterio de Dirichlet, la integral convergerá para todos los valores de α y β reales. Integramos sobre la curva de siempre, pero nos tomamos la libertad de decir que $\alpha > 0$ (más que nada que $\alpha \neq 0$, porque eso complicaría un poco las cosas innecesariamente).

La función que integramos será $\dfrac{e^{i\beta z}}{z^2+\alpha^2}$:

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{i\beta z}}{z^2+\alpha^2}dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\beta z}}{x^2+\alpha^2}dx + \int_{C_R} \frac{e^{i\beta z}}{z^2+\alpha^2}dz$$

Vemos que la segunda integral tiende a 0:

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{i\beta z}}{z^2+\alpha^2}dz\right| \leq \int_{C_R} \frac{|e^{i\beta x}||e^{-\beta y}|}{|z^2+\alpha^2|}|dz| \leq \int_{C_R} \frac{|e^{-\beta y}|}{|z|^2-\alpha^2}|dz|$$

Como $y > 0$ y para que converga esta integral es necesario que $\beta > 0$.

$$\Rightarrow \left|\int_{C_R} \frac{e^{i\beta z}}{z^2+\alpha^2}dz\right| \leq \int_{C_R} \frac{1}{|z|^2-\alpha^2}|dz| = \frac{\pi R}{R^2-\alpha^2} \Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{i\beta z}}{z^2+\alpha^2}dz = 0$$

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{i\beta z}}{z^2+\alpha^2}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\beta x}}{x^2+\alpha^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\cos(\beta x)}{x^2+\alpha^2}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin(\beta x)}{x^2+\alpha^2}dx$$

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{i\beta z}}{z^2+\alpha^2}dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{i\beta z}}{z^2+\alpha^2}, z = \alpha i\right) = \frac{\pi}{\alpha}e^{-\beta\alpha}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\beta x)}{x^2+\alpha^2}dx = \frac{\pi}{\alpha}e^{-\beta\alpha}$$

Esto, si $\beta > 0$. Para $\beta < 0$ podemos volver a integrar calculando el residuo, pero sobre la curva agarrando la de abajo (pero la curva va a estar al revés de como queremos) agarrando como singularidad a $-\alpha i$. Esto mucho no tiene sentido.. es mucho más sencillo ver que la función integrada es par respecto de β (está dentro de un coseno), por lo tanto, el resultado de la integral debe serlo también, por lo tanto, concluimos sin mucho más análisis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\beta x)}{x^2+\alpha^2}dx = \frac{\pi}{\alpha}e^{-|\beta|\alpha}$$

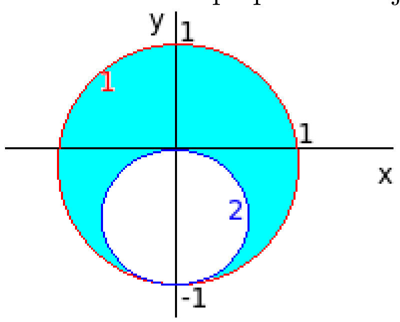
b) Aceptando lo dicho en el enunciado:

$$\frac{d}{d\beta}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\beta x)}{x^2+\alpha^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\beta}\left(\frac{\cos(\beta x)}{x^2+\alpha^2}\right)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(\beta x)}{x^2+\alpha^2}dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{\alpha}e^{-|\beta|\alpha}\right) = -\pi e^{-|\beta|\alpha}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(\beta x)}{x^2+\alpha^2} dx = \pi e^{-|\beta|\alpha}$$

2) Hallar una función armónica en la región $S = S_1 \cap S_2$ siendo:
$S_1 = \{(x,y)/x^2+y^2<1\}$ **y** $S_2 = \{(x,y)/x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}\}$ **que valga 1 en la frontera de S_1 y 2 en la frontera de S_2**

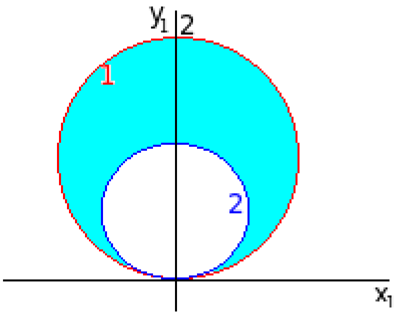
Hacemos un pequeño dibujo que explica el área dónde debe cumplirse la ecuación de Laplace:



Ahora bien, uno se vería tentado a aplicar la transformación $\frac{1}{z}$ pero eso atraería un problema: la circunferencia más pequeña se transformaría en una recta, pero la circunferencia centrada en el origen no. Para que no aparezca un término de circunferencia al realizar la transformación de $\frac{1}{z}$, es necesario que ambas estén *tocando* el origen (el borde). Para esto, necesitamos correr una unidad hacia arriba el problema. Decimos entonces, definiendo el espacio inicial como $z = x+iy$:

$$z_1 = z + i$$

Queda el siguiente problema:



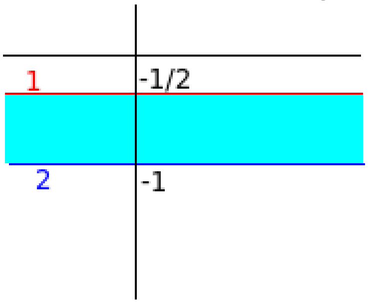
Ahora si estamos en una buena situación para aplicar $\frac{1}{z}$, recordemos primero que para esta transformación:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2} \\ y_2 = \frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2} \end{cases}$$

Aplicamos la transformación ecuación por ecuación:

$$\begin{cases} x_1^2 + (y_1-1)^2 < 1 \\ x_1^2 + \left(y_1-\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x_1^2+y_1^2) - 2y_1 < 0 \\ (x_1^2+y_1^2) - y_1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y_2 + 1 < 0 \\ y_2 + 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_2 < -\frac{1}{2} \\ y_2 > -1 \end{cases}$$

Por lo que queda la siguiente sección:



Claramente, la solución no puede depender de x_2, por lo tanto:

$$\nabla u(x_2, y_2) = u''_{x_2x_2} + u''_{y_2y_2} = u''_{y_2y_2} = 0 \to u(x_2, y_2) = Ay_2 + B$$

Sabiendo que $u(x_2, -1/2) = 1$ y $u(x_2, -1) = 2$, resulta que:

$$u(x_2, y_2) = -2y_2$$

Muy linda solución, pero no nos sirve. Necesitamos saber cómo fue que llegamos hasta acá. Al fin de cuentas, lo que hicimos fue aplicar al espacio (x, y) la transformada $\frac{1}{z+i}$, por lo tanto:

$$z_2 = x_2 + iy_2 = \frac{1}{z+i} = \frac{1}{x+i(y+1)} = \frac{x - i(y+1)}{x^2 + (y+1)^2}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{x}{x^2 + (y+1)^2} \qquad y_2 = \frac{-(y+1)}{x^2 + (y+1)^2}$$

Finalmente:

$$u(x, y) = \frac{2(y+1)}{x^2 + (y+1)^2}$$

3) a) El conjunto de puntos $A = \{(x, y, z)/0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3, -\infty < z < \infty\}$ representa una viga infinita donde fluye calor paralelamente al plano $z = 0$ en régimen permanente. La cara $y = 3$ se mantiene a 3 mientras que las 3 caras restantes se mantienen a 0. Hallar la temperatura en cada punto de la viga b) Utilizando el problema anterior resuelva el que resulta de mantener la cara $y = 0$ a 3 mientras que las 3 caras restantes se mantienen a 0. c) Resuelva ahora el problema de a) pero con las caras $y = 0$ e $y = 3$ a 3 y las restantes caras permanenecen aisladas.

a) Tenemos la ecuación de calor en 3 dimensiones:

$$u'_t(x, y, z) = k^2 \left(u''_{xx}(x, y, z) + u''_{yy}(x, y, z) + u''_{zz}(x, y, z)\right)$$

Pero leyendo bien el enunciado, vemos que el calor fluye paralelo al plano $z = 0$. O sea, podemos decir que no depende de z el problema. También dice que esta en régimen permanente, por lo que tampoco varía con el tiempo. Podemos tirar que $k = 1$.

$$0 = u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y)$$

En vez de ser ecuación de Calor, se convirtió en una de Laplace. LOL.

Aplicamos separación de variables, como siempre:

$$u(x,y) = \chi(x)\gamma(y)$$

blabla cuentas y despejes:

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = -\frac{\gamma''(y)}{\gamma(y)} = \pm\lambda^2$$

Tenemos que elegir el signo de λ de acuerdo al problema que tengamos. En nuestro caso, como la condición no homogenea esta puesta en función de x, el signo que debemos poner es un MENOS:

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = -\frac{\gamma''(y)}{\gamma(y)} = -\lambda^2$$

Entonces:

$$\begin{cases} \chi'' + \lambda^2\chi = 0 & \rightarrow \chi(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \\ \gamma'' - \lambda^2\gamma = 0 & \rightarrow \gamma(y) = C\cosh(\lambda y) + D\sinh(\lambda y) \end{cases}$$

Ahora aplicamos las condiciones de contorno:

$$u(0,y) = 0 \rightarrow \chi(0) = A\cos(0) + B\sin(0) \Longrightarrow A = 0$$

$$u(3,y) = 0 \rightarrow \chi(3) = B\sin(3\lambda) \Longrightarrow \lambda = \frac{n\pi}{3}$$

$$u(x,0) = 0 = \gamma(0) = C\cosh(0) + D\sinh(0) \Longrightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow u_n(x,y) = B'_n \sinh\left(\frac{n\pi}{3}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)$$

Planteamos la condición de contorno:

$$u(x,3) = 3 = B'_n \sinh(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)$$

Pasamos a la serie por el chamuyo de siempre:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sinh\left(\frac{n\pi}{3}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)$$

$$u(x,3) = 3 = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sinh(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)$$

Por lo tanto, el b_n de la serie será: $B'_n \sinh(n\pi)$, por lo tanto:

$$B'_n = b_n \frac{1}{\sinh(n\pi)}$$

Entonces, podemos decir que ahí vemos una serie de Fourier y podemos calcular b_n, para la *extensión impar*:

$$b_n sh\left(n\pi\right) = \frac{2}{6}\int_0^3 3\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx$$

$$b_n = \int_0^3 \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx = \frac{3}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

Ver que si n es par, vale todo 0, y toda la función en sí se hace 0.

Quedando entonces:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi(2n-1)}\frac{1}{\sinh((2n-1)\pi)}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}x\right)\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}y\right)$$

Esa es la respuesta, válida para todo z y todo t.

b) La idea del ejercicio es no volver a hacer cuentas y volver a aplicar separación de variables, etc... sino simplemente ingenierselas un poco. Planteamos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 3-y \end{cases}$$

Notamos que no es algo demasiado complejo, pero vemos que pasa al escribir la solución de a) en función de estas nuevas dos variables:

$$u(x',y') = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi(2n-1)}\frac{1}{\sinh(n\pi)}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}x'\right)\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}(3-y')\right)$$

Obviamente se cumplen las condiciones del nuevo problema en x', vemos en y':

$$u(x',3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi(2n-1)}\frac{1}{\sinh(n\pi)}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}x'\right)\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}0\right) = 0$$

$$u(x',0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi(2n-1)}\frac{1}{\sinh(n\pi)}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}x'\right)\sinh\left((2n-1)\pi\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi(2n-1)}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}x'\right)$$

(Esto último pues en el intervalo $[0;3]$ la serie converge justamente a $f(x)=3$). Dado que cumple con todas las condiciones (y obviamente la de la ecuación diferencial), esta es la solución:

$$u(x',y') = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi(2n-1)}\frac{1}{\sinh(n\pi)}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}x\right)\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}(3-y)\right)$$

c) No nos complicamos, aplicamos el principio de superposición (?), sumamos a) y b) y esa es la respuesta:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)\pi}\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}x\right)}{\sinh((2n-1)\pi)}\left[\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}y\right)+\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}(3-y)\right)\right]$$

4) a) Defina transformada y antitransformada de Fourier de una función $f(x)$. Establezca las condiciones suficientes que debe cumplir $f(x)$ para asegurar la existencia de ambas. Si la transformada de Fourier de $f(x)$ es $F(w)$ y se calcula la antitransformada de la misma, ¿a qué función converge la integral?
b) Establezca las hipótesis necesarias para asegurar que si la transformada de Fourier de $f(x)$ es $F(w)$ entonces $\mathcal{F}\{f''(x)\} = -w^2F(w)$
c) Resolver, utilizando la transformada de Fourier o separación de variables:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0; -\infty < x < \infty; 0 < y < \infty$$

$$u(x,0) = f(x) = e^{-3|x|}$$

d) Enuncie un problema de la física que pueda estar representando por el problema dado.

a) La Transformada:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = F(\omega)$$

La Antitransformada:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}dw$$

Para que existan, es suficiente que se satisfaga que $f(x)$ sea tal que:

1. una función continua a trozos
2. una función absolutamente integrable ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$)
3. que los límites laterales existan (y sean finitos) para todo x del eje real.

La antitransformada de la función convergerá a la semisuma de los límites laterales de la función, a cada punto:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(w)\}(x) = \frac{f^+(x) + f^-(x)}{2}$$

b) Con las hipótesis dadas en a) (por lo tanto existe la transformada de $f(t)$), demostramos que $\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt$$

Aplicamos partes:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = f(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = i\omega F(\omega)$$

El primer término vale 0 pues es, dado que al función es absolutamente integrable por hipótesis, entonces debe cumplirse que:

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$$

Sea $g(t) = f'(t)$. Entonces:

$$\mathcal{F}\{g'(t)\} = i\omega G(\omega) = i\omega(\mathcal{F}\{f'(t)\}) = -\omega^2 F(\omega)$$

Por lo que queda demostrado.

c) Siempre que te pidan resolverlo por uno o por otro, es clásico que se resuelva por transformada. Más teniendo en cuenta que todo el ejercicio habla de transformada (?).

Vamos a aplicar la transformada de Fourier respecto de x:

$$\mathcal{F}_x\{u''_{xx}\} + \mathcal{F}_x\{u''_{yy}\} = 0$$
$$-\omega^2 \mathcal{U}(\omega, y) + \mathcal{U}''_{yy}(\omega, y) = 0$$

$$\mathcal{U}''_{yy}(\omega, y) - w^2 U(\omega, y) = 0$$

Recordemos que la solución de eso es:

$$\mathcal{U}(\omega, y) = A(\omega)e^{-\omega y} + B(\omega)e^{\omega y}$$

Tomamos el modulo de ω, pues haciendo esto seguiremos obteniendo todas las infinitas soluciones, pero nos permite descartar una porque diverge:

$$\mathcal{U}(\omega, y) = A(\omega)e^{-|\omega| y} + B(\omega)e^{|\omega| y}$$

Ahora tenemos que ver que la solución no se nos vaya a la mierda. En términos matemáticos (para tirar chamuyo del lindo en el examen), si $\mathcal{U}$ diverge, por la identidad de parseval u también lo hará. Como justo tenemos que $y > 0$ como condicion de la ecuación, podemos decir que $B(\omega) = 0$ para que nuestra solución sea acotada.

$$\mathcal{U}(\omega, y) = A(\omega)e^{-|\omega| y}$$

Apliquemos la unica condición de contorno que tenemos:

$$\mathcal{F}\{u(x, 0)\} = \mathcal{F}\{e^{-3|x|}\} = F(\omega)$$

$$\mathcal{U}(\omega, 0) = A(\omega) = F(\omega)$$

$$\mathcal{U}(w, y) = F(\omega)e^{-|\omega| y}$$

Ahora tenemos que aplicar la antitrasnformada, recordando la propiedad de la convolución:

$$u(x, y) = [(f * g)(x)](x, y)$$

Siendo $f(x)$ la función del enunciado, y $g(x)$ la antitransforamda de $e^{-|\omega| y}$. Recordamos que tenemos una función similar en la tabla mágica de nuestras mentes, y aplicando un cambio de escala:

$$g(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Bueno, y queda como la convolución de esas cosas.

d) Un problema que podría estar representado por esto podría ser una chapa 2D MUY grande (zarpadamente) donde circula calor por su superficie, de forma estacionaria, y que en una superficie vale justamente esa función (?)

5) a) Hallar la función $y(t)$, solución de $y''(t) + y(t) - \frac{1}{2}\int_0^\tau \tau sen(\tau)d\tau = sen(t)H(t)$ con $y(0^+) = y'(0^+) = 0$ donde $H(t)$ función de Heaviside.
b) Demuestre las propiedades de la Transformada de Laplace utilizadas en a).

a) Claramente nos piden para $t > 0$. Aplicamos la transformada de Laplace:

$$s^2\mathcal{Y}(s) - sy(0) - y'(0) + \mathcal{Y}(s) - \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}\{tsen(t)\}}{s} = \frac{1}{s^2+1^2}$$

Aplicando las condiciones que nos dan:

$$s^2\mathcal{Y}(s) + \mathcal{Y}(s) - \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}\{tsen(t)\}}{s} = \frac{1}{s^2+1}$$

Recordando la propiedad: $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^nF(s)}{ds^n}$

$$s^2\mathcal{Y}(s) + \mathcal{Y}(s) - \frac{1}{2}\frac{-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)}{s} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{Y}(s)(s^2+1) + \frac{1}{2}\frac{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}}{s} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{Y}(s)(s^2+1) - \frac{1}{2}\frac{2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{Y}(s) = \left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right)\frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{s^2}{(s^2+1)^3}$$

La antitransformada de esto segun **Wolfram Alpha** es una combinacion de senos y cosenos, pero para llegar a ella hay que descomponer las fracciones en cosas que nos queden como la derivada segunda de la transformacion del seno, cosa que no creo que esten esperando que hagamos. De todas formas, por ejemplo el primer termino se puede expresar como la convolucion de la función seno con si misma, ya que si se mira atentamente se que el primer termino es su transformada al cuadrado.

b) Demostramos las tres propiedades utilizadas:

1. $\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\mathcal{Y}(s) - sy'(0) - y(0)$. Demostración:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

Sea $g(t) = f'(t)$. Entonces:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = sG(s) - g(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

2. $\mathcal{L}\{\int_0^t f(t')dt'\} = \frac{F(s)}{s}$. Demostración: Hacemos la transformada de la convolución entre $f(t)$ y $g(t) = 1$:

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\} = \mathcal{L}\{\int_0^t f(u)du\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

3. $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$.Demostración:

$$-F'(s) = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = -\int_0^\infty f(t)\frac{d}{ds}\left(e^{-st}\right)dt = +\int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{tf(t)\}$$

11. Final 29/06/2011

1) a) Defina Convergencia puntual y uniforme de una Serie de Fourier.
b) Encuentre el desarrollo exponencial de $f(x) = e^x$ en un intervalo de 2π y a través del mismo desarrollo, su serie trigonométrica.
c) Con los desarrollos encontrados en b) pruebe que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi e^{\pi}}{e^{2\pi}-1} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sinh(\pi)} - \frac{1}{\pi}\right)$$

d) Derive miembro a miembro el desarrollo anterior, ¿Es la serie de Fourier de otra función? ¿A qué función converge la serie derivada?
e) Integre miembro a miembro el desarrollo anterior, ¿Es la serie de Fourier de otra función? ¿A qué función converge la serie integrada?

1) a)

b) El enunciado no especificaba si el intervalo a agarrar era $[0;2\pi]$ o $[-\pi;\pi]$, por eso en c) te da dos posibilidades dependiendo del intervalo elegido. Yo me voy por el intervalo $[0;2\pi]$, total es lo mismo. Calculamos los C_n:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^x \overline{e^{inx}} dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x(1-in)} dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\, e^{x(1-in)}\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\frac{1+in}{1+n^2}$$

Recordar que para la exponencial no es $\frac{2}{T}$ como en la trigonométrica, sino $\frac{1}{T}$.
Podríamos demostrar nuevamente de dónde sale la relación con a_n y b_n, pero ya se hizo en otro final, so:

$$\begin{cases} a_n + ib_n = 2C_{-n} \\ a_n - ib_n = 2C_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi}\dfrac{1}{1+n^2} \\ b_n = \dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi}\dfrac{-n}{1+n^2} \end{cases}$$

Vemos además que $a_0 = choclo * 1$, entonces: Por lo tanto:

$$f(x) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx}$$

$$f(x) = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}\cos(nx) - \frac{n}{1+n^2}\sin(nx)\right)$$

En este caso no convenía partir del cálculo de la trigonométrica, porque íbamos a tener que integrar la exponencial con senos y cosenos... eso generaría un problema.

c) Se vé que estamos cerca de llegar a algo parecido, pero tendríamos que poner $x = 0$ para que desaparezca el seno y el coseno de 1, pero se caga del otro lado de la igualdad (además de que el coeficiente a_0 rompe las pelotas), y si ponemos $x = \pi$ tenemos el problema que aparece un $(-1)^n$ del coseno. Por lo leido del foro dónde saque el enunciado, lo más probable es que el enunciado (mismo al del final) debe estar equivocado (que raro...). Y debe faltar alguna cosa más (además parecía pifiada independientemente del intervalo elegido).

d) Derivamos la serie exponencial:

$$f'(x) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in-n^2}{1+n^2} e^{inx}$$

Parece raro que no vuelva a ser el mismo desarrollo, pero bueno.. en teoría debería seguir siendo el desarrollo de e^x pues, por teorema de derivación de la serie de fourier, la serie derivada converge puntualmente a la derivada de $f(x)$ en los puntos donde ésta es continua, y a la semisuma de los límites laterales en los lugares en los que no (en nuestro caso, en $x = 2k\pi$).

e) Dado que e^x es cuadrado integrable en el intervalo $[0; 2\pi]$, la integral de la serie $f(x)$ convergerá a la integral de la función:

$$\int f(x)dx = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+in}{(1+n^2)in} e^{inx}$$

Devuelta, como convergerá a la integral, nuevamente esta serie convergerá a e^x.

2) a) Demuestre que si $f(z)$ es holomorfa en $z_0 = x_0 + iy_0$ entonces $e^{f(z)}$ es holomorfa en $z = z_0$.
b) Demuestre que si $f(z)$ es conforme en z_0 entonces $e^{f(z)}$ es conforme en $z = z_0$.

a) Podríamos decir que la composición de funciones analíticas da como resultado otra analítica, pero no creo que estén esperando esta respuesta. Planteamos un poco:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Tales u y v cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann y además son diferenciables, en z_0 (condiciones suficientes para que la función sea analítica).

$$e^{f(z)} = e^{u(x,y)+iv(x,y)} = e^{u(x,y)} \left(\cos(v(x,y)) + i\sin(v(x,y))\right)$$

$$\begin{cases} u_e(x,y) = e^{u(x,y)}\cos(v(x,y)) \\ v_e(x,y) = e^{u(x,y)}\sin(v(x,y)) \end{cases}$$

Vemos como son las derivadas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_e}{\partial x}(x,y) = e^{u(x,y)}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cos(v(x,y)) - e^{u(x,y)}\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\sin(v(x,y)) \\ \dfrac{\partial u_e}{\partial y}(x,y) = e^{u(x,y)}\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\cos(v(x,y)) - e^{u(x,y)}\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\sin(v(x,y)) \\ \dfrac{\partial v_e}{\partial x}(x,y) = e^{u(x,y)}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)\sin(v(x,y)) + e^{u(x,y)}\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\cos(v(x,y)) \\ \dfrac{\partial v_e}{\partial x}(x,y) = e^{u(x,y)}\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\sin(v(x,y)) + e^{u(x,y)}\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\cos(v(x,y)) \end{cases}$$

Vemos que $\dfrac{\partial u_e}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v_e}{\partial y}(x_0,y_0)$. Ya simplifico los $e^{u(x_0,y_0)}$, que sino no me entra la ecuación :P:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\cos(v(x_0,y_0)) - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\sin(v(x_0,y_0)) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\sin(v(x_0,y_0)) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\cos(v(x_0,y_0))$$

Como $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\cos(v(x_0,y_0))+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\sin(v(x_0,y_0)) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\sin(v(x_0,y_0))+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\cos(v(x_0,y_0))$$

Y queda claro que son iguales. Quedaría demostrar la segunda ecuación, pero son más cuentas que no valen la pena, y es claro que van a dar.
b) Para que $e^{f(z)}$ sea conforme en z_0 debe ser analítica, y su derivada en z_0 debe ser distinta de 0. La primera condición se cumple, pues $f(z)$ es conforme en z_0, por lo tanto analítica en z_0, y como demostramos en a), $e^{f(z)}$ es analítica en z_0. Para ver que su derivada no se anule:

$$\left(e^{f(z)}\right)'(z_0) = f'(z_0)e^{f(z_0)}$$

Claramente el segundo término no se anula para ningún valor de z, y el primero no se anula, pues $f(z)$ es conforme en z_0, por lo tanto su derivada no se anula en z_0. Por lo tanto, $e^{f(z)}$ es conforme en z_0.

3)a) ¿Existe algún valor de α tal que:

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^4+x^2+1}\right)^{\alpha}}dx$$

sea convergente?
b) Elija algún valor de α y calcule el valor principal de $I(\alpha)$, ¿Es igual que el valor de $I(\alpha)$? Explique.

a) Dado que $x^4+x^2+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, no nos preocupamos por discontinuidades en el eje real, sino el tema hacia infinito. Para esto, el grado final del polinomio del divisor debe ser mayor a 1. Para esto, $\alpha > \frac{1}{2}$. ¿Por qué converge la integral con tal condición? pues porque:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{x^4+x^2+1}\right)^{\alpha}} < \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

Si $\alpha > \frac{1}{2}$, entonces la integral de $-\infty$ a ∞ convergerá, por lo tanto también lo hará la de nuestra función.

b) Claramente elegimos $\alpha = 2$ para no complicarnos demasiado la cosa (que ya lo está).

$$VPC(I(2)) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+x^2+1}dx$$

Dado que la integral converge, esta lo hará al VPC (había un teorema sobre ello creo, pero no sé si era de Cauchy).
Integramos sobre la curva de siempre, y agarraremos dos singularidades. El mismo verso de siempre para decir que la integral sobre al curva C_R converge a 0, pero el tema y finalmente nos quedará:

$$int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}dx = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{z^4+z^2+1}, z_0, z_1\right)$$

El problema acá es justamente el cálculo del residuo y más claramente, el de las raices. Todas las raices son complejas, y en el examen no tenés calculadora, así que LTA a más no poder. En particular, las raices son: $\dfrac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, o sea, una cosa hermosa. Dejo para que cada uno en sus casas lo calcule, yo asumo que en el medio del final cambiaron el enunciado y yo no tengo forma de saber a qué.

4) Sea $f(t) = \begin{cases} 2 & \textbf{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \textbf{si } t < 1 \cup t > 2 \end{cases}$**.**
a) Describa a $f(t)$ como combinación lineal de la función de Heavside.
b) Resuelva $y' + 3y + \int_0^t y(t')dt' = f(t)$. (No lo decía, pero seguramente $y(0) = 0$).

a) Este lo terminamos rapidito:

$$f(t) = 2\left(H(t-1) - H(t-2)\right)$$

Ver que si $t < 1$ todo vale 0, si $1 < t < 2$, la primera función de Heavside vale 1 y la otra 0, entonces todo vale 2, y si $t > 2$, las dos funciones valen 1, entonces se anulan entre sí.

b) Aplicamos la Transformada de Laplace miembro a miembro:

$$s\mathcal{Y}(s) + 3\mathcal{Y}(s) + \frac{\mathcal{Y}(s)}{s} = \mathcal{L}\{2\left(H(t-1) - H(t-2)\right)\} = 2\left(\mathcal{L}\{1 \cdot H(t-1)\} - \mathcal{L}\{1 \cdot H(t-2)\}\right)$$

Aplicando el segundo teorema de traslación, que dice:

$$\mathcal{L}\{f(t)H(t-a)\} = F(s)e^{-as} \tag{26}$$

$$\mathcal{Y}(s)\left(s + 3s + \frac{1}{s}\right) = 2\left(\frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-2s}\right)$$

$$\mathcal{Y}(s)\left(\frac{s^2 + 3s + 1}{s}\right) = \frac{2}{s}\left(e^{-s} - e^{-2s}\right)$$

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 1}\left(e^{-s} - e^{-2s}\right) = \frac{2}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}\left(e^{-s} - e^{-2s}\right) = \frac{2}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}\left(e^{-s} - e^{-2s}\right)$$

$$\mathcal{Y}(s) = 2\frac{e^{-s}}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} - 2\frac{e^{-2s}}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow y(t) = 2\sinh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)e^{\frac{3}{2}}H(t-1) + 2\sinh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)e^{\frac{3}{2}}H(t-2)$$

$$y(t) = \sinh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)e^{\frac{3}{2}} \cdot 2\left(H(t-1) - H(t-2)\right) = \sinh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)e^{\frac{3}{2}}f(t)$$

5) a) Defina Transformada seno y su antitransformada. ¿A qué función converge la antitransformada?
b) Calcule:

$$\begin{cases} u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0 \qquad 0 \le x < \infty \qquad 0 \le y < \infty \\ u(0,y) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \end{cases}$$

a) Transformada seno:

$$\mathcal{F}_s\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)dt = F_s(\omega)$$

Antitransformada seno:

$$\mathcal{F}_s^{-1}\{f(t)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(\omega)\sin(\omega t)d\omega$$

Converge a la extensión impar de la función $f(t)$ (respecto de $t > 0$) excepto en los puntos de discontinuidad de la función, a donde convergerá a la semisuma de los límites laterales.

b) Tenemos la ecuación:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

Trabajamos utilizando la Transformada SENO, porque no tenemos algo definido de $-\infty$ a ∞, y no podemos usar la Coseno porque no tenemos $u'(0,y)$ sino $u(0,y)$. Recordamos que:

$$\mathcal{F}_s\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)dt$$

Definimos entonces:

$$\mathcal{U}_s(\omega,y) = \mathcal{F}_s\{u(x,y)\} = \int_0^\infty u(x,y)\sin(\omega x)dx$$

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}_s\{f(x)\}$$

Recordamos que:

$$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = \omega f(0) - \omega^2 F_s(\omega)$$

Entonces, aplicamos la transformada seno a esta ecuación diferencial:

$$\omega u(0,y) - \omega^2\mathcal{U}(\omega,y) + \mathcal{U}''_{yy}(\omega,y) = -\omega^2\mathcal{U}(\omega,y) + \mathcal{U}''_{yy}(\omega,y) = 0$$

Entonces:

$$\mathcal{U}(\omega,y) = A(\omega)e^{-\omega y} + B(\omega)e^{\omega y}$$

Como así no podemos descartar ningún coeficiente, ponemos módulo porque seguimos pudiendo formar las mismas funciones (o sea, cualquier función que es combinación lineal de estas, lo será si ponemos módulo).

$$\mathcal{U}(\omega,y) = A(\omega)e^{-|\omega|y} + B(\omega)e^{|\omega|y}$$

Podemos decir $B(\omega) = 0$ porque esa función no está acotada, y si $\mathcal{U}$ no es acotado, tampoco lo será u (por la igualdad de Parseval para la integral de fourier).

$$\mathcal{U}(\omega, y) = A(\omega)e^{-|\omega|y}$$

Vemos la condición de frontera:

$$\mathcal{U}(\omega, 0) = F_s(\omega) = A(\omega) \Rightarrow \mathcal{U}(\omega, y) = F_s(\omega)e^{-|\omega|y}$$

$$u(x, y) = \mathcal{F}_s^{-1}\{\mathcal{U}(\omega, y)\}$$

Ahora bien, como todavía no sé si vale la propiedad de la convolución para esta transformada, por el momento lo dejo como:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(\omega)e^{-|\omega|y}\sin(\omega x)d\omega$$

Habría que calcular primero la transformada de $f(x)$, que es sencillo, pero luego esa cosa de ahí que no pinta mucho. Completo luego de consultar con Mario.