1er. Parcial de Análisis III -Cátedra González- 23/10/12

Ejercicio 1

a) Analizar si existe $f/ \quad f(z) + \overline{f(z)} = 2Re(z)$ siendo ambas f y $\overline{f}$ enteras.

b) Hallar una función holomorfa que transforme Ω en Ω' con $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Re(z) < 2,\ Im(z) > 0\}$ y $\Omega' = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 1\}$

¿En qué puntos de $\mathbb{C}$ la función encontrada es conforme? Indicar cómo transforma el borde $(\partial\Omega)$.

c) Decidir en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ la función $f(x, y) = \sinh\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ es armónica conjugada y hallar la conjugada armónica.

Ejercicio 2

a) Describir y graficar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \frac{1}{(z-i+1)^n}$. Analizar la convergencia en el borde.

b) Determinar las regiones donde $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ se puede desarrollar en serie de potencias de $(z - i)$ y obtener el desarrollo donde $z = 0$ es convergente.

c) Siendo $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{6} \frac{(-1)^n}{|n|!}(z - i)^n$. Clasificar singularidades en i. Calcular $Res[f, i]$ y $\int\limits_C (z-i)^3 f(z)dz$ con C una curva cerrada y simple en el interior de i.

Ejercicio 3

a) Hallar y clasificar las singularidades en $\hat{\mathbb{C}}$ de $g(z) = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{z}\right)-1}(z - \frac{1}{2\pi i})$

b) Si $g(z)$ es la del item $a)$ obtener:

i) $Res[g, 0]$

ii) $Res[g, 1]$

iii) $\int\limits_\gamma g(z)dz$ con $\gamma = \left\{z : \left|z - \frac{1}{2\pi i}\right| = \frac{3}{10\pi}\right\}$

c) Calcular $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$