

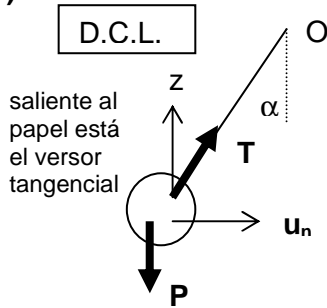
**RESOLUCION PROPUESTA DE MODELO: TEMA 1 DEL 13.07.04**

[volver a enunciado](#)

Proponemos una resolución abreviada para que el estudiante tenga una orientación sobre los temas a tratar; reconstruya su propia solución y haga las consultas personales a los docentes. Luego si desea, para mayores detalles e introducción teórica se introducen enlaces en cada ejercicio.

**EJERCICIO #1**

a)



$$(1) : \vec{\kappa} : T \cos \alpha - P = 0$$

$$(2) : \vec{u}_n : T \sin \alpha = m\omega^2 R = m\omega^2 l \sin \alpha$$

Entonces:  $\frac{g}{\cos \alpha} = \omega^2 l$  o sino:  $\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$

El coseno debe ser de valor absoluto menor o igual que uno, por lo tanto las velocidades angulares deben superar cierto módulo crítico para que se desarrolle el movimiento del péndulo cónico.

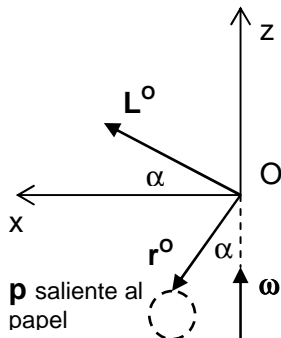
$$\omega \geq \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}} \quad [\text{detalle "1A"}]$$

b)  $T = m\omega^2 l$  y teniendo en cuenta la inecuación anterior  $T \geq mg$ , entonces el módulo de la tensión del hilo es mayor o igual que el módulo del peso. También se puede pensar que la componente vertical de la tensión del hilo equilibra al peso y que la componente normal (radial) de la tensión es la fuerza centrípeta, y por consiguiente  $T \geq P$ .

c)

Hagamos el dibujo en 2D:

[\[detalle "1C"\]](#)



$$\vec{L}^o = \vec{r} \times \vec{p} = (-l \cos \alpha \vec{\kappa} + l \sin \alpha \vec{\imath}) \times m\omega l \sin \alpha \vec{j}$$

$$\vec{L}^o = m\omega l^2 \sin^2 \alpha \vec{\kappa} + m\omega l^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{\imath} \quad (\text{ec. \#3})$$

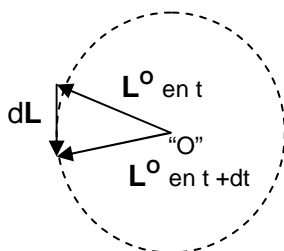
vemos que:

$$\vec{L}^o = \vec{L}_z^o + \vec{L}_x^o$$

Por lo anterior:  $\vec{L}^o$  tiene módulo constante pero varía en dirección entonces, como vector, este momento angular no es constante y entonces su variación estará relacionada con el torque de las fuerzas exteriores respecto de "O":

$$\vec{\tau}^o = \frac{d\vec{L}^o}{dt} \quad (\text{ec. \#4})$$

Si ahora calculamos la derivada del momento cinético, verificaremos la igualdad. Previamente veamos el movimiento del vector momento cinético en el esquema, vista desde arriba:



Si recordamos cómo se derivan vectores rotantes, premultiplicando vectorialmente por la velocidad angular: (y recordando ec.#3)

$$\frac{d\vec{L}^o}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}^o = \omega \vec{\kappa} \times (L_z^o \vec{\kappa} + L_x^o \vec{\imath}) = m\omega^2 l^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{j} = Pl \sin \alpha \vec{j}$$

verifica la ec.#4.

**ENERGÍA MECÁNICA DESDE EL LABORATORIO:**

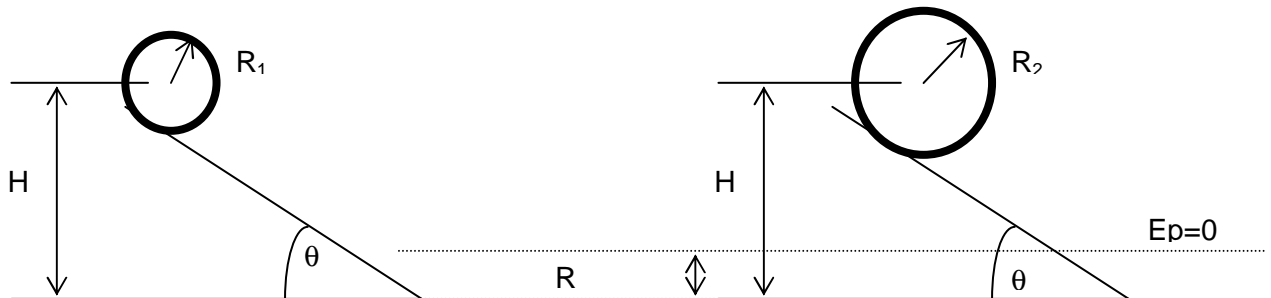
La variación de energía mecánica es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas.

¿Hay fuerzas no conservativas que realicen trabajo? No.

Y aún más, el trabajo del **peso** es nulo y el trabajo de la **tensión** en el hilo también, por lo tanto según el teorema de las fuerzas vivas, tampoco debería variar la energía cinética.

De hecho la velocidad de la partícula varía solamente en dirección, por lo tanto la energía cinética se mantiene constante, ya que el módulo de la velocidad de la partícula es constante.

**EJERCICIO #2**

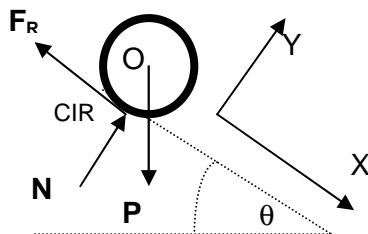


Suponemos: la forma de distribución de masa está a escala, como veremos, el caso es independiente de la masa de los aros; además  $R_1 < R_2$  pero asumiremos despreciable la diferencia de las alturas finales de los centros de masa, al considerar la variación de energía potencial gravitatoria. **La altura descendida por el centro de masa se asumirá  $h = H - R$ .**

**a) Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.):**

CIR es el centro instantáneo de rotación y "O" es el centro de masa.

; "x" "y" es sistema inercial



[detalle "2A"]

Para este problema en particular quizás convenga más referirse al CIR:

$$\sum \vec{\tau}^{ext\,CIR} = I^{CIR} \vec{\gamma}$$

$$-mgR \sin \theta = -I^{CIR} \gamma ; \text{ por rodar sin deslizar : } \gamma R = a_{CM}$$

$$\text{(Steiner) } I^{CIR} = I^o + mR^2 \quad \text{para el aro: } I^{CIR} = 2mR^2$$

$$a_{CM} = \frac{1}{2} g \sin \theta$$

Concluimos que si ambos parten de reposo, ambos llegan al mismo tiempo pues la aceleración del centro de masa del aro es independiente de la masa y del radio.

**b) Recordemos que  $h=H-R$  y lo que hemos asumido para simplificar.**

$E_p=0$  en la posición inferior (final de los aros)

[detalle "2B"]

Además por rodar sin deslizar

$$\Delta E_m = 0$$

La energía mecánica final se puede suponer como de rotación y de traslación del centro de masa (1), o sino como (2) rotación pura alrededor del CIR.

$$(1) \quad mgh = \frac{1}{2} I^{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} mV_{CM}^2 \quad \text{por rodar sin deslizar } V_{CM} = \omega R \rightarrow mgh = \frac{1}{2} 2mR^2 \omega^2 \rightarrow gh = R^2 \omega^2$$

$$\boxed{\omega = \frac{\sqrt{gh}}{R}} \quad (\text{ec. \#2})$$

La expresamos para cada aro como:  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$  que nos dice que a mayor radio menor velocidad angular

concluimos que como :  $R_1 < R_2$  se verifica que  $\omega_2 < \omega_1$  .

c) Sí, cambian las respuestas. [\[detalle "2C"\]](#)  
 c<sub>1)</sub>

CILINDRO:  $a_{CM} = \frac{2}{3} g \sin \theta$  ; ARO:  $a_{CM} = \frac{1}{2} g \sin \theta$

La aceleración del centro de masa del cilindro es mayor que la del aro de igual radio e igual masa, entonces el cilindro llega antes.

c<sub>2)</sub>

$$\omega = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}gh}}{R} \quad (\text{cilindro}) ; \quad \text{de la ec.\#2:} \quad \omega = \frac{\sqrt{gh}}{R} \quad (\text{aro})$$

Entonces la velocidad angular del cilindro es mayor que la del aro.

### EJERCICIO #3

La onda estacionaria la podemos suponer como superposición de dos ondas que avanzan en sentidos opuestos (nosotros supondremos frentes de ondas planos ) y de frecuencia única, en un medio homogéneo en el caso de ondas mecánicas. Podemos decir que si se tratase de ondas electromagnéticas no será necesario el medio material, pero debemos suponer que este desarrollo se hará para un medio de índice de refracción constante.

onda progresiva (desde el origen)  $\epsilon_1 = \epsilon_0 \cos(\omega t - kx)$  ;

{hemos supuesto por simplicidad que la fase inicial es nula. } [\[detalle "3A"\]](#)

onda regresiva (desde el punto x=L hacia el origen)  $\epsilon_2 = \epsilon_0 \cos(\omega t + kx)$

Hacemos la superposición, suponiendo igual amplitud de ambas ondas,

$$\epsilon = 2\epsilon_0 \cos kx \cdot \cos \omega t \quad (\text{ ec.\#1 } )$$

Donde:  $f(x) = 2\epsilon_0 \cos kx$  podemos denominarla amplitud variable con la posición, y los puntos en donde es **máxima se llaman antinodos o vientres**, mientras que los puntos donde se **anula se denominan nodos**.

Pero tengamos en claro que es de variable espacial; proponemos la solución del tipo:

$$f(x) = C \sin kx + D \cos kx$$

Entonces de la ecuación :

$$\epsilon = (C \sin kx + D \cos kx) \cos \omega t \quad (\text{ec. \#3} )$$

donde C y D son constantes que se establecerán según sean las condiciones de borde o de frontera del medio en donde se desarrolle la onda estacionaria.  
 En nuestro caso serán tubos sonoros, con sus extremos abiertos o cerrados.

Antes de pasar al punto "3a", describiremos el significado de los símbolos utilizados en la ecuación de onda estacionaria ( ec. #1):

$\epsilon_0$  amplitud de cada onda (progresiva y regresiva) que se puede suponer, componen la onda estacionaria

$2\epsilon_0$  amplitud máxima, de la onda estacionaria. Cada punto oscilará con una amplitud  $f(x)$ .

$\epsilon$  elongación o desplazamiento del punto "x" para un determinado tiempo "t"

$\omega$  frecuencia angular o pulsación (unidades: tiempo a la menos uno)

$k$  número de onda (unidades: longitud a la menos uno)

$\omega t$  fase temporal o instantánea ( en radianes)

$kx$  fase local o espacial ( en radianes)

$\lambda$  longitud de onda

$f$  frecuencia

Relaciones básicas:

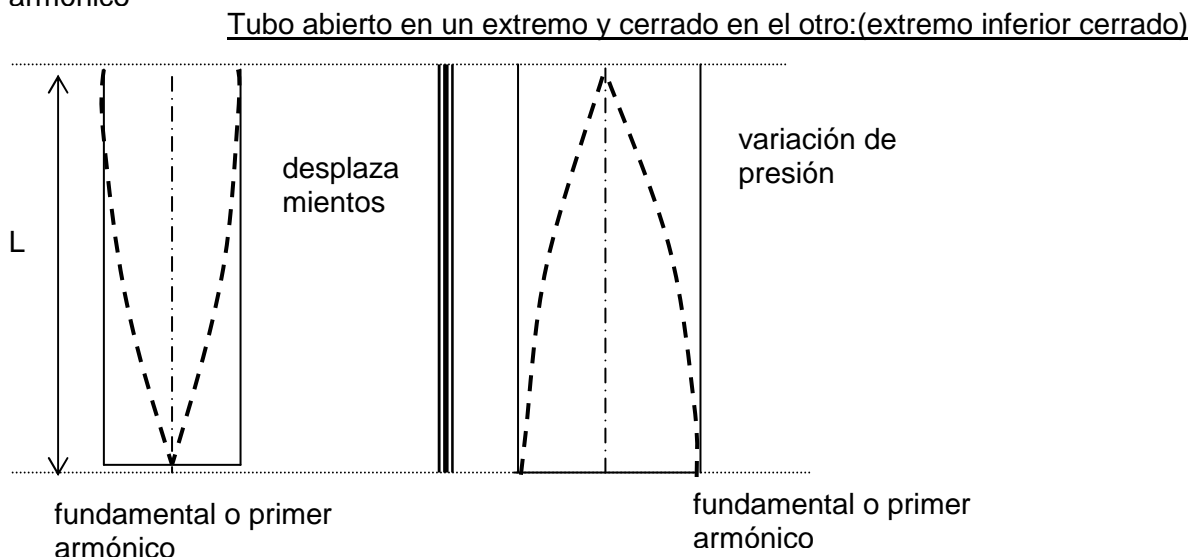
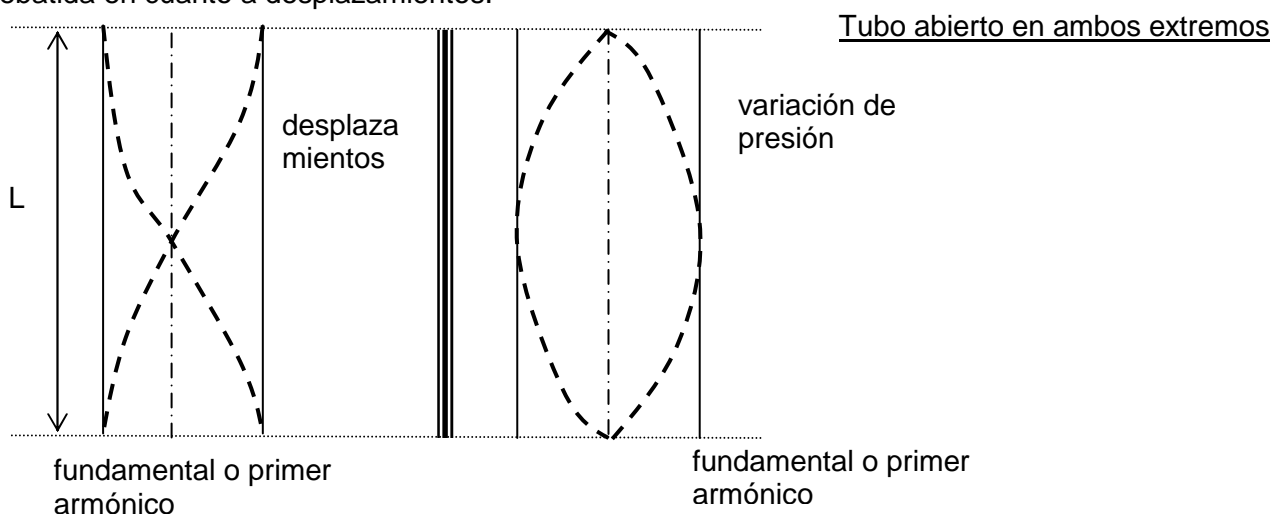
$$\omega = 2\pi f$$

$$k = 2\pi/\lambda$$

$$v = \omega/k = \lambda f$$

**3 a y b) [detalle "3B"]**

En tubos sonoros se puede representar los modos de oscilación desde el punto de vista de los desplazamientos y desde el punto de vista de las variaciones de presión. Siendo ambas descripciones análogas, teniendo en cuenta que los nodos se encuentran desplazados  $\lambda/4$  o también se dice que están defasados en  $\pi/2$  radianes. Como se muestra para el modo fundamental o primer armónico. Recordemos que la onda sonora es una onda longitudinal, la figura es una representación rebatida en cuanto a desplazamientos.



1. Si el tubo es abierto en ambos extremos: [detalle "3C"]

$$\varepsilon = D \cdot \cos kx \cdot \cos \omega t$$

Donde "D" será la amplitud máxima de la onda estacionaria de desplazamiento.

Si se quisiera representar en términos de variación de presión, la ecuación queda:

$$\varepsilon = D \cdot \sin kx \cdot \cos \omega t$$

Donde, ahora, "D" representa la amplitud máxima de variación de presión. Y se ve que el largo "L" del tubo abierto en ambos extremos se relaciona con la longitud de onda de cada armónico como:

$$L = n\lambda_n/2 \quad \text{con } n=1;2;3 \dots$$

2. Si el tubo es abierto en un extremo y cerrado en el otro:

$$\cos kL = 0 \rightarrow kL = (2n-1)\pi/2 \quad \text{con } n=1;2;3; \dots$$

$$\rightarrow L = (2n-1)\lambda_n/4$$

Se obtuvo, ahora, cómo se relaciona la longitud del tubo abierto en un extremo y cerrado en el otro con la longitud de onda de cada armónico.

Aplicaremos estas conclusiones a la resolución numérica del ejercicio:

**Tubo abierto en ambos extremos:**

$$V_s = \lambda_v f_n \rightarrow f_n = \frac{nV_s}{2L} \rightarrow \text{fundamental. } f_1 = \frac{1.340m/s}{2.0,6m} = 283,3Hz \quad (\text{o primer armónico})$$

$$f_2 = 2 \cdot f_1 = 566,7Hz \quad ; \quad f_3 = 3 \cdot f_1 = 850Hz$$

**Tubo abierto en un extremo y cerrado en el otro:**

$$V_s = \lambda_v f_n \rightarrow f_n = \frac{(2n-1)V_s}{4L} \rightarrow \text{fundamental. } f_1 = \frac{1.340m/s}{4.0,6m} = 141,7Hz \quad (\text{o primer armónico})$$

$$f_2 = 3 \cdot f_1 = 425 Hz \quad ; \quad f_3 = 5 \cdot f_1 = 708,3 Hz$$

#### EJERCICIO #4

4 a) Una DIOPTRA es una superficie de separación de dos medios de distinta densidad óptica (distinto índice de refracción). Una dioptra esférica es un casquete esférico.

Si decimos que una dioptra es cóncava, vamos a suponer que el lado cóncavo del casquete esférico es el que corresponde al medio óptico de menor índice de refracción.

( [detalle "4 a"](#) )

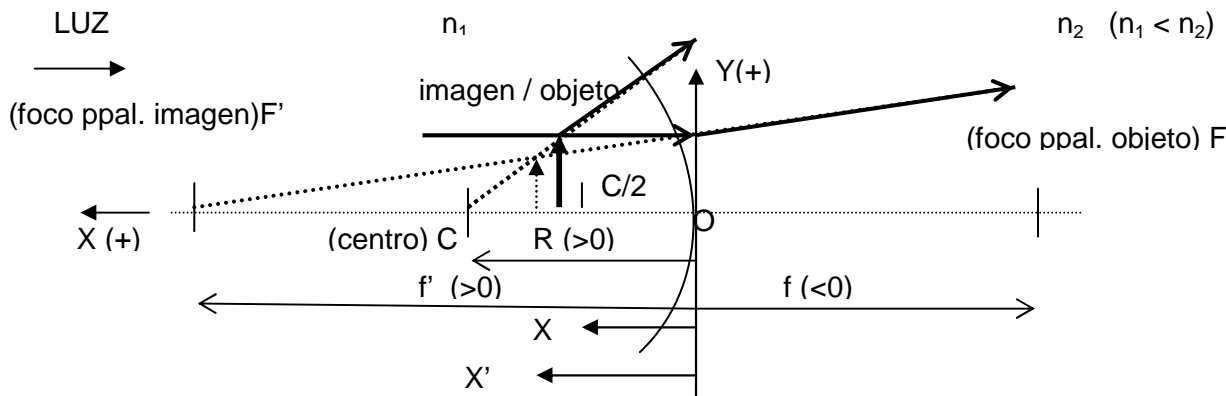
Convención de signos:

Adoptaremos un eje vertical normal al eje principal "y" con signo positivo cuando se mida por sobre el eje principal.

Adoptaremos un eje horizontal coincidente con el eje principal "x" con signo positivo cuando se mida desde el polo de la dioptra hacia el lado del objeto real (punto de donde proviene la luz), vale decir que el sentido positivo del eje es contrario a la luz incidente.

$$\frac{(n_2 - n_1)}{R} = \frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} \quad \text{Ecuación de las dioptras esféricas.}$$

Esta es la marcha o esquema de rayos que se pide, dibujada en función de los elementos calculados a continuación:



[\[\[ver cómo calcular distancias focales\]\]](#)

Si colocamos al objeto real entre el infinito y el polo "O" de la dioptra, la imagen dada por esta es virtual.

$$\frac{(n_2 - n_1)}{R} = \frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x}$$

$$\frac{(n_2 - n_1)}{R} + \frac{n_1}{x} = \frac{n_2}{x'} \rightarrow \frac{n_2 R x}{x(n_2 - n_1) + R n_1} = x'$$

"x'" es mayor que cero, imagen virtual, mientras "x" sea mayor que cero, dado que  $n_2 > n_1$ . Se verifica que según el sistema de referencia adoptado ( ver figura) si la distancia imagen es menor que cero la imagen es real. Asimismo el objeto real se verifica cuando la distancia objeto es positiva.

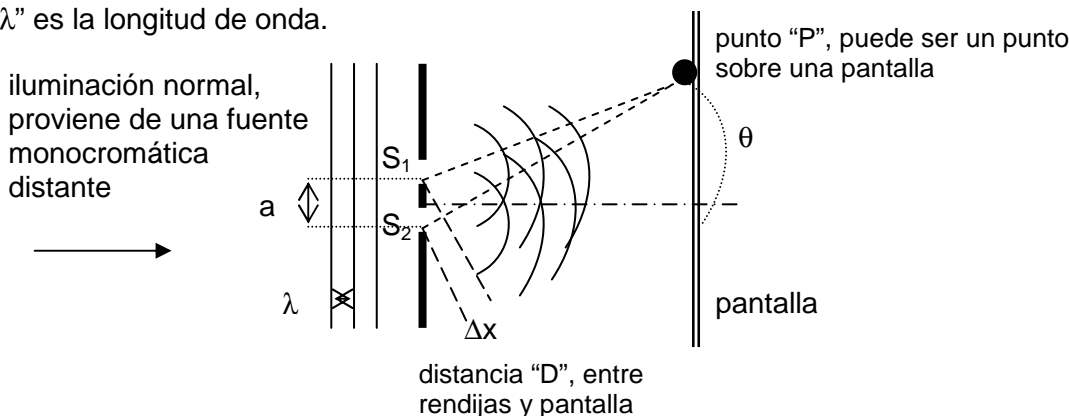
#### 4 b)

Experimento de Young:

El experimento realizado por Young en 1801, se hizo con luz solar, pero vamos a suponer para nuestro planteo que se utiliza una fuente monocromática y que los frentes de onda que alcanzan las rendijas son planos. Las rendijas son angostas ( su tamaño es aproximadamente igual a la longitud de onda), las rendijas son muy largas en la dirección normal al plano del papel. En cada rendija se establecerá ( por simplicidad ) una fuente secundaria de emisión de ondas según lo que postula el principio de Huygens. Mediante esta **división del haz** incidente, se logra establecer un sistema de dos fuentes puntuales coherentes y en fase, ya que se coloca el plano de las rendijas paralelo a los frentes de onda, esto es en condiciones de iluminación normal.

"a" es la distancia entre rendijas.

"λ" es la longitud de onda.



$$\delta = k \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} a \cdot \sin \theta \quad (\text{ecuación \#1})$$

( [detalle "4 b"](#) )

Volvemos a la cuestión del experimento de Young, ahora para calcular la posición de los máximos y mínimos sobre la pantalla:

De la figura se ve que para calcular la diferencia de camino en forma simplificada, se la asocia al ángulo con que salen los rayos (suponiendo a estos como un haz de rayos paralelos que alcanzan al punto "P") y a la distancia entre rendijas (ver ecuación # 1):

$$\Delta x = a \cdot \sin \theta$$

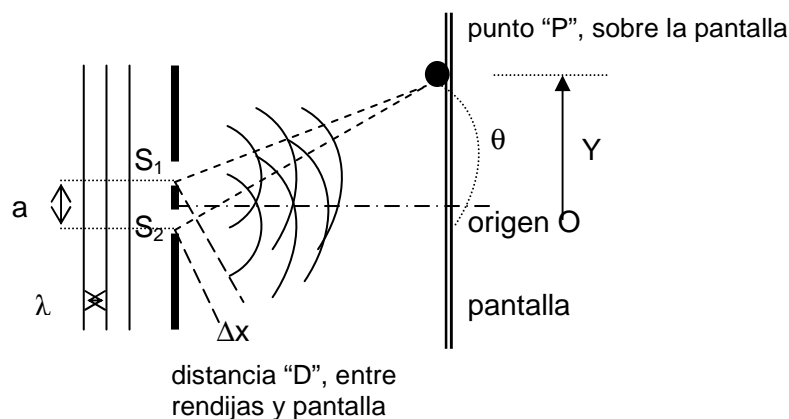
Si esta diferencia corresponde a una cantidad entera de longitudes de onda, habrá máximos en la pantalla:

$$\Delta x = n\lambda \quad \text{con } n = 1; 2; 3; \dots \rightarrow n\lambda = a \cdot \sin \theta$$

que nos muestra dónde ubicar los MÁXIMOS EN LA PANTALLA EN FUNCIÓN DEL ÁNGULO  $\theta$ .

Si esta diferencia corresponde a una cantidad impar de longitudes mitades de longitud de onda, habrá mínimos en la pantalla:

$$\Delta x = \text{impar} \cdot \frac{\lambda}{2} \rightarrow \text{impar} \cdot \frac{\lambda}{2} = a \cdot \sin \theta$$



Si la coordenada "Y" se toma desde el centro del máximo principal y se puede asumir que  $Y \ll D$  las ecuaciones de máximo y mínimo se pueden expresar simplificada como sigue:

$$\sin \theta \approx \text{tg} \theta = \frac{y}{D} \rightarrow$$

$$n\lambda = a \cdot \frac{y}{D} \rightarrow y = \frac{n\lambda D}{a} \quad \text{con } n=1;2;3;\dots \text{ MÁXIMOS DE INTERFERENCIA}$$

$$\text{impar} \cdot \frac{\lambda}{2} = a \cdot \frac{y}{D} \rightarrow y = \frac{\text{impar} \lambda D}{2a} \quad \text{MÍNIMOS DE INTERFERENCIA}$$

**Para el caso de nuestro ejercicio, del punto 4 b)**

$$\text{Para } \lambda_1 \rightarrow D = \frac{y \cdot a}{n\lambda} = \frac{0,018m \cdot 0,0001m}{3 \cdot 4 \cdot 10^{-7}m} = 1,5m \gg y$$

$$\text{Para } \lambda_2 \rightarrow y = \frac{5 \cdot \lambda_2 D}{a} = \frac{5 \cdot 1,5m \cdot 7 \cdot 10^{-7}m}{1 \cdot 10^{-4}m} = 5cm$$

Comentario acerca de, cómo es la forma simplificada del diagrama de intensidad de iluminación, sobre la pantalla, dada por la experiencia de interferencia doble rendija de Young con luz monocromática.

De las ecuaciones #1 y  $I_s = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$  (ecuación # 2) y considerando  $\sin \theta \approx \text{tg} \theta = \frac{y}{D}$

$$I_s = 2I_1(1 + \cos \delta) \xrightarrow{\text{por identidades}} I_s = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad ((\text{identidad trigonométrica: } [(1 + \cos \delta) = 2 \cos^2 \frac{\delta}{2}]))$$

$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \cdot \sin \theta \rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \cdot \frac{y}{D}$  por lo tanto la ecuación buscada será:

$$I_s = 4I_1 \cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda} a \cdot \frac{y}{D}\right]$$

que es de la forma:  $I_s = A \cos^2[B \cdot y]$  que se grafica a continuación:

