1. Enunciado

1. La radiación emitida por un cuerpo negro a $500\,°C$ incide sobre una superficie metálica cuya función de trabajo es $\phi = 0{,}214\,eV$.

   a) Determinar cuál es la longitud de onda más larga que es capaz de extraer electrones de la superficie.

   b) ¿Que porción de la radiancia total es efectiva para producir fotoelectrones?
   (Expresar el resultado en términos de una integral adimensional sobre la distribución de Planck)

2. Se tiene un fotón de longitud de onda 3000 ± 5 Å

   a) ¿Cuál es la incertidumbre de su posición?

   b) ¿Qué energía cinética tendría un electrón de la misma longitud de onda?

3. Entre las posibles líneas de decaimientos del cadmio se observa la línea roja de 6438 Å.

   a) ¿Cuál es la diferencia de energia ΔE que le da origen? (Observación: no es necesario conocer los n de los estados inicial y final).

   b) Determinar el desdoblamiento normal de Zeeman para la línea 6438 Å cuando los átomos se introducen en un campo magnético de $9\,mT$.

   Notas: Resolver sin considerar el spin. Tener en cuenta las reglas de selección.

4. Una partícula se encuentra en una zona del eje x acotada según $-\frac{L}{4} < x < \frac{L}{4}$.
   Se describe su comportamiento según la función $\Psi(x,t) = A * cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right) e^{i\omega t}$.

   a) Normalice la función $\Psi(x,t)$ y obtenga el valor de la constante A.

   b) Grafique la función $\Psi(x,0)$ y la densidad de probabilidad, ambas en función de x en la región indicada.

Ayuda:

$$\int cos^2(u)du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}sin(2u)$$

2. Resolución

1. La radiación emitida por un cuerpo negro a $500\,°C$ incide sobre una superficie metálica cuya función de trabajo es $\phi = 0{,}214\,eV$.

   a) Determinar cuál es la longitud de onda más larga que es capaz de extraer electrones de la superficie.

   b) ¿Que porción de la radiancia total es efectiva para producir fotoelectrones?
   (Expresar el resultado en términos de una integral adimensional sobre la distribución de Planck)

   Cuando aplicamos el concepto del fotón de Einstein al efecto fotoeléctrico, podemos escribir

   $$h\nu = \phi + K_{max} \tag{1}$$

   donde $h\nu$ es la energía cinética del fotón. La ecuación (1) dice que un solo fotón porta una energía $h\nu$ hacia la superficie en donde es absorbida por un solo electrón. Parte de esta energía (ϕ, llamada la *función de trabajo* de la superficie emisora) se usa para provocar que el electrón escape de la superficie del metal. El exceso de energía ($h\nu - \phi$) se convierte en energía cinética del electrón. Existe una frecuencia de corte donde $K_{max} = 0$, de modo que:

   $$h\nu_0 = \phi \tag{2}$$

   donde el fotón tiene justo la energía suficiente para expulsar a los fotoelectrones y nada extra aparece como energía cinética. Si ν se reduce por debajo de ν_0, $h\nu$ será menor que ϕ y no tendrá energía suficiente para expulsar fotoelectrones, es decir, no se producirá efecto fotoeléctrico.[1]

   De la ecuación (2) tenemos que la frecuencia mínima para que se produzca el efecto fotoeléctrico es ν_0, entonces:

   $$h\nu_{min} = h\frac{c}{\lambda_{max}} = \phi$$

   Despejando y reemplazando tenemos

   $$\lambda_{max} = h\frac{c}{\phi} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} J \cdot s \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}}{3{,}428 \cdot 10^{-20} J} = 6 \cdot 10^{-6} m = 6\mu m$$

   $$\boxed{\lambda_{max} = 6\mu m}$$

   Para el siguiente punto, empezaremos a calcular la radiancia total.

   $$R_T(T) = \int_0^\infty R(\lambda, T) d\lambda = \epsilon\sigma T^4 \tag{3}$$

   donde ϵ es el coeficiente de emisividad. Siendo que en el problema se plantea que la fuente de radiación es un cuerpo negro, el coeficiente de emisividad es igual a uno.

   $$R_T(T) = \int_0^\infty R(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 {}^\circ K^4} \cdot (773^\circ K)^4 = 20244 \frac{W}{m^2}$$

[1] Física Vol. 2 Versión Ampliada 4ta edición. Halliday - Resnick Capitulo 49

Ahora plantearemos la radiancia efectiva para producir fotoelectrones. En el punto anterior habíamos calculado que había un λ_{max} para que se produzca el efecto fotoeléctrico. Para fotones con $\lambda > \lambda_{max}$, el efecto fotoeléctrico no sucede. Entonces, la radiancia efectiva esta dada por los fotones con longitud de onda menor a λ_{max}:

$$R_E(T) = \int_0^{\lambda_{max}} R(\lambda, T) d\lambda$$

En este caso no podemos usar la ecuación (3) porque resuelve el caso de que se tomen todas las longitudes de onda. En cambio, dejaremos el resultado usando la distribución de Planck (como pide el enunciado)

$$R_E(T) = \int_0^{\lambda_{max}} R(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{6\mu m} 2\pi hc^2 \frac{1}{\lambda^5 \left[e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right]} d\lambda$$

La porción de la radiancia total efectiva para producir fotoelectrones es

$$\boxed{\frac{R_E(T)}{R_T(T)} = \frac{2\pi hc^2 \displaystyle\int_0^{6\mu m} \frac{1}{\lambda^5 \left[e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right]} d\lambda}{20244 \frac{W}{m^2}} \quad ; T = 773^\circ K}$$

2. Se tiene un fotón de longitud de onda 3000 ± 5 Å

    a) ¿Cuál es la incertidumbre de su posición?

    b) ¿Qué energía cinética tendría un electrón de la misma longitud de onda?

Del principio de incertidumbre tenemos la relación

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{4}$$

por otro lado tenemos la longitud de onda de de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{5}$$

De aqui podemos obtener una expresión para Δp

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\Delta p = \left| -\frac{h}{\lambda^2} \right| \Delta\lambda = \frac{h}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

$$\Delta p = \frac{h}{\lambda^2} \Delta\lambda \tag{6}$$

Juntando las ecuaciones (4) con (6) obtenemos

$$\Delta x \frac{h}{\lambda^2} \Delta\lambda \geq \frac{h}{4\pi}$$

$$\Delta x \geq \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} \tag{7}$$

Resolvemos para los valores que propone el ejercicio usando la ecuacion (7)

$$\Delta x \geq \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda}$$

$$\Delta x \geq \frac{\left(3000 \cdot 10^{-10} m\right)^2}{4\pi 10 \cdot 10^{-10} m}$$

$$\boxed{\Delta x \geq 7 \cdot 10^{-6} m}$$

Para el siguiente punto, usaremos la fórmula de energía cinética clásica. Antes de poder usar esta fórmula, debemos justificar porque usamos esta y no la relativista. Utilizando la ecuación (5) calculamos el valor de p

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} J \cdot s}{3000 \cdot 10^{-10} m} = 2{,}21 \cdot 10^{-27} kg \frac{m}{s}$$

Si reemplazamos y despejamos de la ecuación de cantidad de movimiento relativista

$$p = \frac{mV}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

obtenemos que

$$V = 2425 \frac{m}{s} \ll c$$

Habiendo hecho esta aclaración podemos usar la fórmula clásica de energía cinética

$$K = \frac{mV^2}{2}$$

$$2mK = m^2 V^2$$

$$2mK = p^2$$

$$K = \frac{p^2}{2m} \tag{8}$$

Utilizando la ecuación (8) calculamos la energía cinética

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\left(2{,}21 \ \cdot 10^{-27} kg \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} kg} = 2{,}68 \cdot 10^{-24} J$$

No debemos olvidarnos de calcular la incertidumbre del valor recién calculado. Utilizando nuevamente la ecuación (8) junto con (6)

$$\Delta K = \left| \frac{2p}{2m} \right| \Delta p = \frac{p}{m} \Delta p = \frac{p}{m} \frac{h}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

$$\Delta K = 1{,}79 \cdot 10^{-26} J = 0{,}0179 \cdot 10^{-24} J \approx 0{,}02 \cdot 10^{-24} J$$

Por lo tanto, el valor de energía queda:

$$\boxed{K = (2{,}68 \pm 0{,}02)10^{-24} J}$$

3. Entre las posibles líneas de decaimientos del cadmio se observa la línea roja de 6438 Å.

   a) ¿Cuál es la diferencia de energia ΔE que le da origen? (Observación: no es necesario conocer los n de los estados inicial y final).

   b) Determinar el desdoblamiento normal de Zeeman para la línea 6438 Å cuando los átomos se introducen en un campo magnético de $9\,mT$.

   Notas: Resolver sin considerar el spin. Tener en cuenta las reglas de selección.

   El primer punto se resuelve fácilmente utilizando el postulado de la frecuencia de Bohr[2]

   $$h\nu_{nm} = E_n - E_m = \Delta E \tag{9}$$

   La ecuación (9) nos quiere decir que si un átomo cambia de su estado de energía inicial E_n a un estado de energía final (menor) E_m, la energía del fotón emitido es ΔE. Entonces, reemplazando en la ecuacion (8) ν_{nm} por la relación correspondiente con la longitud de onda obtenemos

   $$h\frac{c}{\lambda_{nm}} = \Delta E$$

   $$\Delta E = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} J \cdot s \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}}{6438 \cdot 10^{-10} m} = 3{,}086 \cdot 10^{-19} J$$

4. Una partícula se encuentra en una zona del eje x acotada según $-\frac{L}{4} < x < \frac{L}{4}$. Se describe su comportamiento según la función $\Psi(x,t) = A * cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right) e^{i\omega t}$.

   a) Normalice la función $\Psi(x,t)$ y obtenga el valor de la constante A.

   b) Grafique la función $\Psi(x,0)$ y la densidad de probabilidad, ambas en función de x en la región indicada.

   Como la partícula se encuentra acotada en una zona, la probabilidad de encontrarla en algun lugar de esa zona es 1. Para eso debemos integrar la función densidad de probabilidad en dicha zona e igualarla a 1. La fórmula densidad de probabilidad es

   $$P(x) = |\Psi(x)|^2 = A^2 cos^2\left(\frac{6\pi x}{L}\right)$$

   planteamos que la probabilidad de encontrar a la partícula dentro de la zona donde esta acotada es igual a 1

   $$\int_{-\frac{L}{4}}^{\frac{L}{4}} P(x)dx = 1$$

[2] Física Vol. 2 Versión Ampliada 4ta edición. Halliday - Resnick Capitulo 50

$$\int_{-\frac{L}{4}}^{\frac{L}{4}} A^2 cos^2\left(\frac{6\pi x}{L}\right) dx = 1$$

Proponemos el siguiente cambio de variables

$$\theta = \frac{6\pi x}{L}$$

$$dx = \frac{d\theta L}{6\pi}$$

los límites de integración cambian

$$x = -\frac{L}{4} \longrightarrow \theta = -\frac{3}{2}\pi$$

$$x = \frac{L}{4} \longrightarrow \theta = \frac{3}{2}\pi$$

reemplazando quedaría

$$\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} A^2 cos^2(\theta) \frac{L \cdot d\theta}{6\pi} = 1$$

$$\frac{A^2 L}{6\pi} \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} cos^2(\theta) d\theta = 1$$

$$\frac{A^2 L}{6\pi} \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} cos^2(\theta) d\theta = \frac{A^2 L}{6\pi}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} sen(2\theta)\right]_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = 1$$

$$\frac{A^2 L}{6\pi}\left[\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{4}\overbrace{sen(3\pi)}^{0} - \left(-\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{4}\overbrace{sen(-3\pi)}^{0}\right)\right] = 1$$

$$\frac{A^2 L}{6\pi}\frac{3}{2}\pi = \frac{A^2 L}{4} = 1$$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{4}{L}}}$$

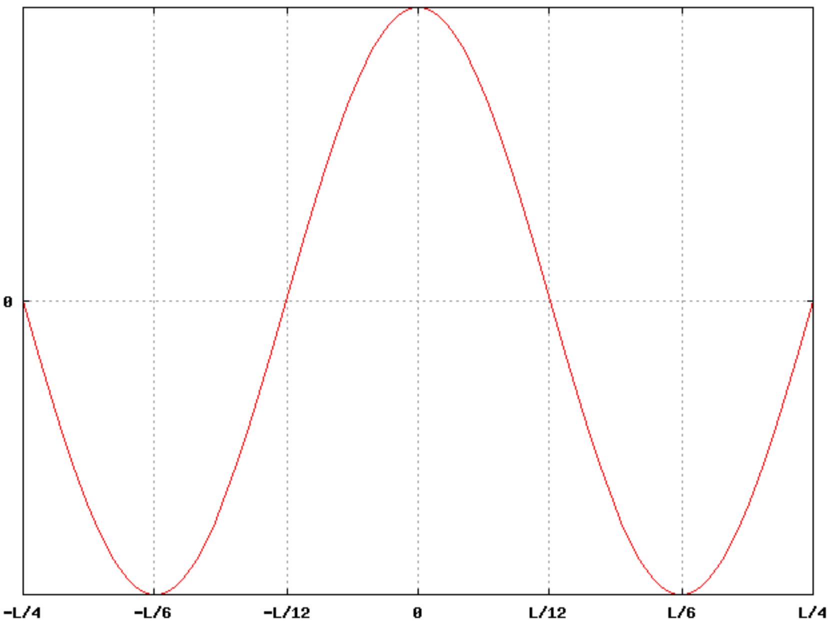

Figura 1: Función de onda $\Psi(x, 0)$

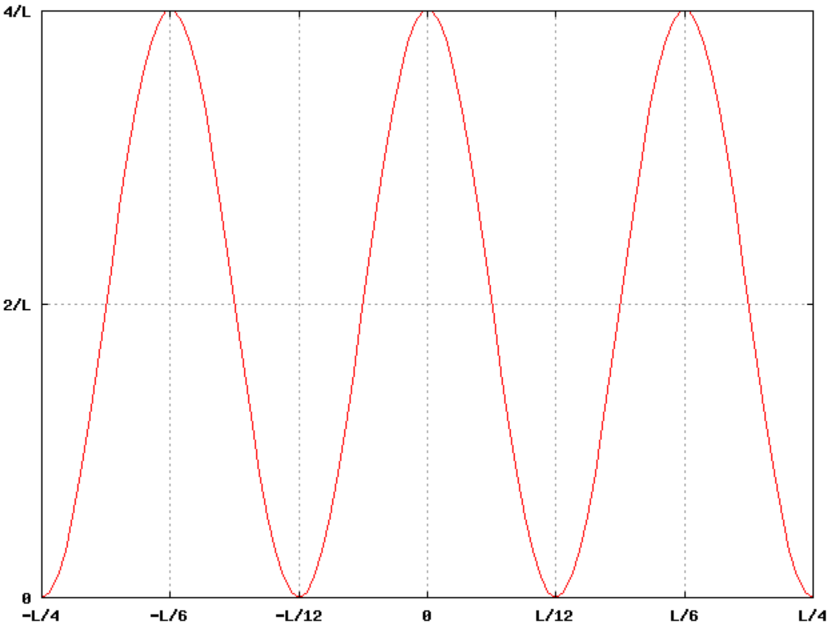

Figura 2: Función densidad de probabilidad $P(x)$