Las ecuaciones de Maxwell

Un repaso de lo visto, algunas cosas faltantes y un camino abierto a temas más complejos

Mucho del tiempo empleado hasta el momento ha sido dedicado al estudio de los campos eléctricos y magnéticos de los que hemos aprendido las propiedades más importantes, las que resumimos aquí para tenerlas en forma compacta.

La primera es conocida como la ley de Gauss referida al campo eléctrico. Las cargas eléctricas son las fuentes (sin son positivas) o sumideros del campo eléctrico (si son negativas). Las líneas de campo eléctrico nacen en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas. La mencionada ley establece que si consideramos una superficie cerrada S entonces el flujo del campo eléctrico $\vec{E}$ a través de dicha superficie es proporcional al total de la carga eléctrica encerrada (Q_{enc}) en el volumen *Vol* limitado por la superficie S (usamos *Vol* para el volumen en lugar de V porque esta última la reservamos para otra magnitud).

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{Vol} \rho \; dVol \quad (1)$$

El factor ε_0 (permitividad dieléctrica del vacío) refleja únicamente el sistema de unidades empleado y no es relevante. El segundo miembro de la derecha (el que involucra la integral de volumen) corresponde al caso más general de una distribución volumétrica de cargas ρ.

La (1) puede ser transformada por medio del teorema del flujo (o también llamado de Gauss-Ostrogradsky) el que establece que el flujo de un campo vectorial $\vec{F}$ a través de una superficie cerrada S iguala a la integral de la divergencia de dicho vector extendida al volumen *Vol* limitado por la superficie S.

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{Vol} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \; dVol \quad (2)$$

Comparando las expresiones (1) y (2) es fácil encontrar:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

Las relaciones (1) y (3) contienen la misma cantidad de información respecto del fenómeno físico. La primera está expresada en forma integral y en cierta forma (al menos en nuestro caso) es más simple de utilizar. La segunda forma involucra derivadas parciales (a través del operador divergencia) por lo que las técnicas matemáticas para su resolución son más complejas y conviene postergarlas para Análisis III. Sin embargo enfatizamos que ambas contienen la misma cantidad de información.

Al tratar con medios dieléctricos nos resultó conveniente introducir dos vectores extras. El desplazamiento $\vec{D}$ y la polarización $\vec{P}$, el primero está asociado con las así llamadas “cargas libres” y el segundo con las de polarización. La relación entre todos ellos la sintetizamos como:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4)$$

Si el medio es lineal entonces también lo es la relación entre el campo eléctrico y la polarización a través de la susceptibilidad dieléctrica X_e en la forma $\vec{P} = \varepsilon_0 \mathrm{X}_e \vec{E}$ por lo que la relación entre desplazamiento y campo eléctrico deviene en:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \mathrm{X} \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \mathrm{X}) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad (5)$$

El campo eléctrico generado por una distribución estática de cargas tiene la particularidad de ser conservativo, es decir que si consideramos una curva cerrada *C* entonces la circulación del campo a lo largo de dicha curva es nula:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (6)$$

Todo campo vectorial conservativo admite una función potencial escalar de la que deriva, en nuestro caso elegimos el potencial electroestático *V* (cuidado: distingamos entre volumen *Vol* y potencial *V*).

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (7)$$

Combinando (3) y (7) obtenemos:

$$-\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} V\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\nabla^2 V \quad (8)$$

La (8) recibe el nombre de ecuación de Poisson y es una ecuación diferencial a derivadas parciales de segundo orden que permite calcular el potencial *V* en una región si se conoce la distribución de cargas y/o el potencial en el contorno de la región a estudiar. No estamos en condiciones de resolver esta ecuación salvo para un par de situaciones muy simples. Sin embargo es interesante mencionar que es la ecuación que resuelven programas como QuickField por métodos numéricos.

Por otra parte, los campos magnéticos tienen su origen en corrientes eléctricas, es decir en cargas en movimiento. Una diferencia sustancial distingue al vector inducción magnética $\vec{B}$ del campo eléctrico $\vec{E}$, las líneas de $\vec{B}$ son cerradas sobre sí mismas, es decir que no tienen punto de partida ni de llegada. En tal situación el flujo de $\vec{B}$ sobre cualquier superficie cerrada es nulo:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (9)$$

Donde la segunda igualdad se sigue del teorema del flujo.
Dado que las líneas de $\vec{B}$ son cerradas sobre sí mismas es razonable anticipar que la circulación de dicho vector sobre una curva cerrada ha de ser no nula. En efecto, la ley de Ampere en el vacío nos dice que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (10)$$

Donde C es una curva cerrada, S una superficie cuyo borde es C, μ_0 la permeabilidad magnética del vacío, I_{enc} las corrientes que atraviesan la superficie S y $\vec{J}$ el vector densidad de corriente, el cual para un medio de conductividad σ queda dado por $\vec{J} = \sigma\,\vec{E}$.
En el caso de estar presente un medio material es conveniente, a semejanza de lo desarrollado con materiales dieléctricos, introducir dos vectores auxiliares: el campo magnético $\vec{H}$ asociado con las llamadas “corrientes verdaderas” (las que circulan por cables) y la magnetización $\vec{M}$ asociada con las “corrientes de magnetización” fruto de la respuesta de los momentos dipolares magnéticos atómicos.
La relación vectorial entre estos tres vectores es: $\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$. Si el medio tiene una respuesta lineal la magnetización es proporcional al campo magnético a través de la susceptibilidad magnética X_m: $\vec{M} = X_m \vec{H}$ y resulta simple encontrar:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0\left(\vec{H} + X_m \vec{H}\right) = \mu_0\left(1 + X_m\right)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (11)$$

En estas condiciones la ley de Ampere queda dada para una situación general como:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (12)$$

Podemos recordar ahora el teorema de Stokes o de la circulación, el que manifiesta que la circulación de un campo vectorial $\vec{F}$ alrededor de una curva cerrada C iguala al flujo del rotor de dicho campo vectorial a través de una superficie S limitada por la curva C:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{S} \quad (13)$$

En nuestro caso obtenemos: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ (14)

Notemos cómo en este repaso hemos expresado las propiedades fundamentales de los campos eléctricos y magnéticos en dos formas: la primera es la integral (flujos sobre superficies, circulaciones sobre curvas) donde damos relaciones de valores totales en una región del espacio. En la segunda damos relaciones en las derivadas en puntos del espacio (divergencias, laplacianos, rotores). Ambas formas contienen exactamente la misma información respecto del fenómeno físico. Es sólo una cuestión de conveniencia el decidir qué forma conviene usar.

Hasta aquí hemos dado las propiedades de los campos eléctricos y magnéticos aisladamente y parece que ambos fenómenos procedieran independientemente.
Sin embargo esto no es así. La ley de inducción de Faraday nos da el primer paso para ver la vinculación entre ambos campos.
Dicha ley establece que toda vez que el flujo magnético concatenado a través de una superficie *S* delimitada por una curva *C* cambie a lo largo del tiempo, entonces aparecerá una fuerza electromotriz *V* inducida a lo largo de la curva *C* de valor:

$$V = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} \quad (15)$$

La última igualdad manifiesta que si existe una fuerza electromotriz, entonces debe estar presente un campo eléctrico cuya circulación a lo largo de la curva sea la fuerza electromotriz inducida. Este campo es definitivamente no electroestático dado que su circulación en una curva cerrada es no nula.
Al utilizar el teorema de Stokes en la (15) encontramos:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (16)$$

La ecuación anterior nos dice que en una situación estática (sin variaciones en el tiempo) el rotor del campo eléctrico es nulo y volvemos a las condiciones de la (6), es decir que el campo eléctrico es conservativo. Si por el contrario existen cambios temporales de $\vec{B}$ el campo eléctrico tiene asociada una fuerza electromotriz en un camino cerrado.
Hasta aquí hemos hecho un resumen muy acotado de un gran número de clases. Las ecuaciones (1) a (8) describen los vectores “eléctricos”, de la (9) a la (14) los correspondientes “magnéticos” y la (15) y (16) nos vincula cambios temporales de $\vec{B}$ con cambios espaciales de $\vec{E}$.
Sin embargo es importante marcar que tenemos un problema oculto que debemos resolver. Para explicarlo comenzamos recordando una idea básica de la primera clase: la carga eléctrica se conserva, no se crea ni se destruye. Con esta idea en principio consideramos un volumen *Vol* con cargas dentro del mismo y líneas de corriente que atraviesan la superficie *S* que limita a dicho volumen. Entonces, si las líneas de corriente son entrantes la cantidad de carga se incrementa y si las líneas son salientes la cantidad de carga disminuye. Escribimos entonces esta relación:

$$\oint_S \vec{J}\cdot dS = \frac{-dQ}{dt} = \frac{-d}{dt}\left(\int_V \rho\, dV\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (17)$$

Esta es la llamada ecuación de continuidad y es solamente una descripción matemática de la conservación de la carga.
Aplicamos ahora esta ecuación a la (14):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\equiv 0$$

La expresión es siempre nula porque se sigue de una identidad matemática. Es decir que tenemos un problema, la conservación de la carga (principio fundamental) exige un determinado valor para la divergencia de la densidad de corriente y de la ecuación anterior obtenemos un valor nulo. Dada nuestra confianza en la conservación de la carga concluimos que hay algo erróneo en la ley de Ampere como la expresamos. En realidad no es un error sino una omisión que fue descubierta y enmendada por James Clerk Maxwell a mediados del siglo XIX.
La primera aproximación que haremos es totalmente matemática y luego mostraremos una situación donde trataremos de entender el cómo la corrección de Maxwell salva un problema. Postulemos, arbitrariamente, una nueva forma para la ecuación del rotor del campo magnético:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (18)$$

Si ahora volvemos a la ecuación de continuidad resulta:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) \equiv 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}\right)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Con lo que nuestro problema está resuelto. La versión corregida de la ley de Ampere satisface la conservación de la carga pero nos demanda comprender cómo opera. Un ejemplo simple es el siguiente (figura 1):

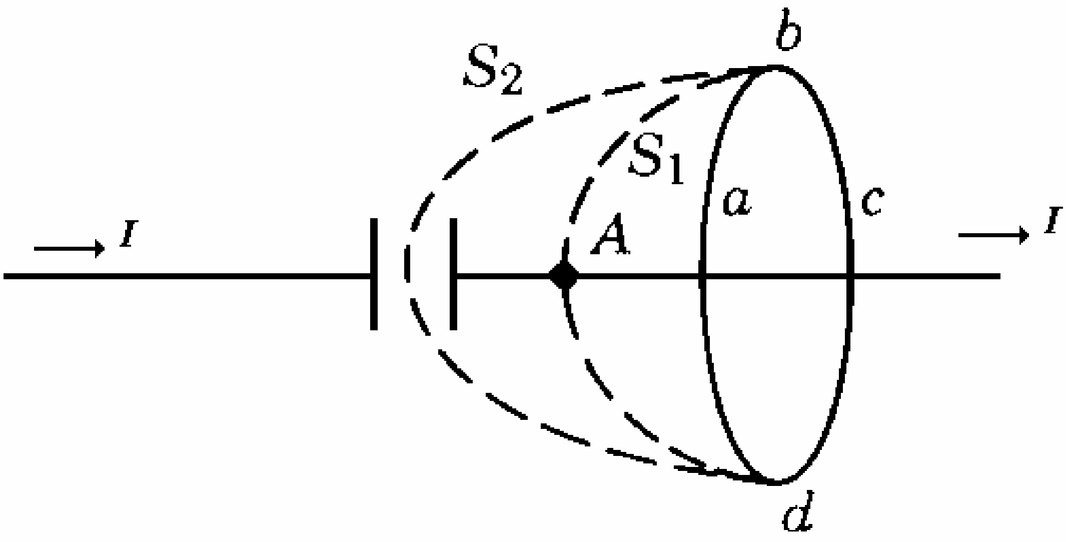


Figura 1. La ley de Ampere aplicada a la misma curva pero a dos superficies distintas

Un capacitor de placas planas paralelas está siendo cargado con una corriente constante *I*. La curva *C* es una circunferencia de radio *R* (puntos *a*, *b*, *c* y *d*) con centro en el cable y ubicada lejos de las placas del capacitor, de forma tal que podamos suponer que la dirección de las líneas de $\vec{B}$ son líneas circunferenciales como las que corresponden a un alambre muy largo. Si por superficie tomamos a S_1, entonces es fácil aplicar la (12). Pero si ahora tomamos una superficie

S_2 que pase por dentro de las placas del capacitor y no intercepte al cable parece que nos encontramos en un problema: sobre la curva C hay campo y su circulación es no nula, sin embargo la superficie propuesta no intercepta al cable y por lo tanto el miembro de la derecha es nulo. La discrepancia estriba en que utilizamos la versión original de la ley de Ampere.
Utilicemos ahora la versión corregida. Al tomar la superficie S_1 notamos que el cable la intercepta en el punto A y no tenemos problemas en identificar la densidad de corriente. Además por estar los puntos de la superficie S_1 fuera del capacitor descartamos el término proporcional a la derivada temporal del desplazamiento porque éste es nulo sobre la superficie. En cambio, cuando tomamos S_2 la situación se invierte. No tenemos un término de corriente, pero hay un campo eléctrico dentro del capacitor que varía.
La corriente que ingresa al capacitor es directamente la derivada de la carga almacenada con respecto al tiempo y si expresamos a esta última en términos de la densidad superficial de carga σ, las dimensiones del capacitor (área A y distancia entre placas d) y el vector desplazamiento tenemos:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(\sigma\ A)}{dt} = A\frac{d\sigma}{dt} = A\frac{d\left|\vec{D}\right|}{dt}$$

La densidad de corriente "equivalente" resulta de dividir la corriente por el área de las placas: $\vec{J}_D = \frac{d\vec{D}}{dt}$ que concuerda exactamente con la nueva ley de Ampere. Es importante recalcar que esta es una "falsa" corriente, no está asociada con un transporte de cargas, por eso la denominamos "corriente de desplazamiento" y le agregamos un subíndice para destacar esta situación.
La figura 2 muestra un esquema de las líneas de campo magnético en las vecindades de un alambre (asociado con una densidad de corriente) y las correspondientes al interior del capacitor (asociado con la corriente de desplazamiento)

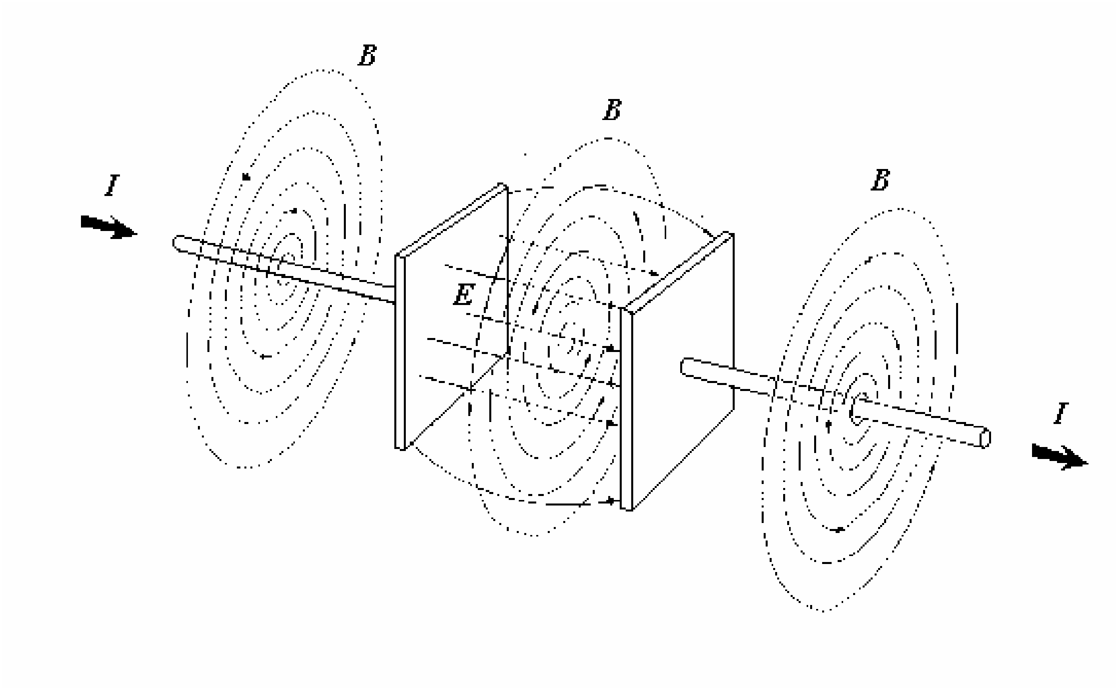


Figura 2. Una visión en perspectiva de las líneas de campo magnético.

¿Hemos trabajado tanto para solucionar un caso particular? ¿Es esto un juego de corto alcance? Pues no, esto es lo que distingue a la gente capaz de nosotros. La hipótesis de Maxwell es que el término de corriente de desplazamiento debe ser incluido siempre y no únicamente en este caso particular.

¿Qué sucedió entonces para que no notáramos esta falta de completitud? La respuesta se encuentra en que primero la abrumadora mayoría de los problemas que estudiamos son de carácter estático o de régimen permanente, por lo que no había variaciones temporales que importaran. En el caso de la ley de Faraday teníamos campos magnéticos variables que daban un acoplamiento con el campo eléctrico pero los ejemplos no demandaban tomar también en cuenta la versión completa de la ley de Ampere.

Podemos resumir ahora las ecuaciones de Maxwell en las formas integral y diferencial (19):

Forma integral	Forma diferencial
$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \, dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$
$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Lo expuesto hasta aquí es lo mínimo exigible en nuestra materia. Formalmente es hasta un "poquito" escaso. Para no ser tan tacaños (aunque fuera de programa) vamos a adentrarnos en aguas más profundas.
Veremos ahora que las más interesantes son las ecuaciones en los rotores.

La ecuación de ondas

El conjunto de ecuaciones (19) es simple "en principio" pero da respuestas a un número muy grande de problemas. Quienes estudien electromagnetismo tendrán ocasión de trabajar mucho con ellas, pero ahora quiero mostrar un ejemplo relativamente simple pero importante.
Como ocurre muchas veces vamos a considerar un caso particular de las ecuaciones que nos permita eliminar la mayor cantidad de términos para disminuir así las dificultades matemáticas.
Pensemos entonces en una región del espacio vacío (da lo mismo que sea aire porque ya sabemos que difiere muy poco del vacío). Pedimos que dicha zona carezca de cargas (ρ=0) y que por la misma no circulen corrientes ($\vec{J} = 0$).
Las ecuaciones de Maxwell quedan entonces:

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \ \vec{E} & \vec{B} = \mu_0 \ \vec{H} \end{array} \quad (20)$$

Es interesante ver el papel entrelazado de las dos ecuaciones que involucran el rotor. Parece que entre las dos se podría obtener una única en una sola variable y esto es cierto.
Para llevarlo a cabo recordamos la siguiente identidad del análisis vectorial:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \right) - \nabla^2 \vec{F} \quad (21)$$

Aplicado al campo eléctrico tenemos (daría lo mismo con el magnético):

$$\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = \vec{\nabla} \times \left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) - \nabla^2 \vec{E} = -\dfrac{\partial \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right)}{\partial t} = -\varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{array} \quad (22)$$

En el segundo renglón hemos utilizado $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ya que pedimos ausencia de cargas y en la parte correspondiente al rotor de $\vec{B}$ anulamos el términos correspondiente a la densidad de corriente.

La última ecuación es nuestro objetivo ya que logramos reducirla a una única variable pero su significado es totalmente oscuro dado que proviene de manipulaciones matemáticas que efectuamos automáticamente. Ha llegado el momento de desmenuzarla un poco.
Para comenzar debemos enfatizar que se trata de una ecuación diferencial a derivadas parciales. En coordenadas cartesianas es:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (23)$$

Donde no parece que hayamos mejorado mucho. Reduzcamos aún más la complejidad del problema y consideremos uno unidimensional en el que sólo existen variaciones a lo largo del eje *x* (la solución es uniforme sobre los ejes *y* y *z*).

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (24)$$

¿Cómo se resuelve ésta ecuación? Pues bien, es conocida desde hace bastante tiempo y se la conoce como ecuación de onda y la primera vez que la vimos fue en Física I en conexión con el movimiento transversal de una cuerda tensa. Pero Física I está tan lejos en el recuerdo, ¿no?

Vamos a aplicar el viejo método de proponer una solución (de hecho ya la conocemos), la reemplazamos en la ecuación diferencial y vemos que la satisface.
Sea entonces una solución genérica de la forma $u=f(x\pm vt)$, donde f es una función no especificada y v una constante cuyas dimensiones deben ser las de una velocidad. Definimos previamente una variable auxiliar $w=x\pm vt$ y efectuamos las derivadas indicadas.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial w}\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\\
&\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}=v\frac{\partial u}{\partial w}\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(v\frac{\partial u}{\partial w}\right)=v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}v\right)=v^2\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
\end{aligned} \qquad (25)$$

La función propuesta es entonces una solución de la ecuación diferencial. Si alguien siente sospechas que reemplazamos lo que ya conocíamos está totalmente en lo cierto. Resolver ecuaciones diferenciales a derivadas parciales demanda temas avanzados y que están fuera de nuestro alcance. Nos limitamos a “mostrar” la solución.
Si hacemos un poquito de memoria recordaremos que si el argumento de la solución era con signo menos obteníamos una onda que viaja hacia la derecha y que si tomábamos el signo más

correspondía a una que viaja hacia la izquierda. En ambos casos la velocidad de propagación es precisamente *v*.
La función *f* puede ser cualquiera con derivadas continuas, pero la más común es de la forma armónica, es decir con funciones seno o coseno. La forma usual es:

$$u = \sin(kx - \omega t) \quad (26)$$

Esta solución involucra al llamado número de onda k=2 π / λ donde l es la longitud de onda (distancia entre máximos o mínimos consecutivos) y la pulsación ω=2 π / T siendo T el período de la señal (tiempo que transcurre entre dos máximos o mínimos consecutivos).
Es bueno recordar algunas ideas básicas de las ondas. Veamos unas gráficas:

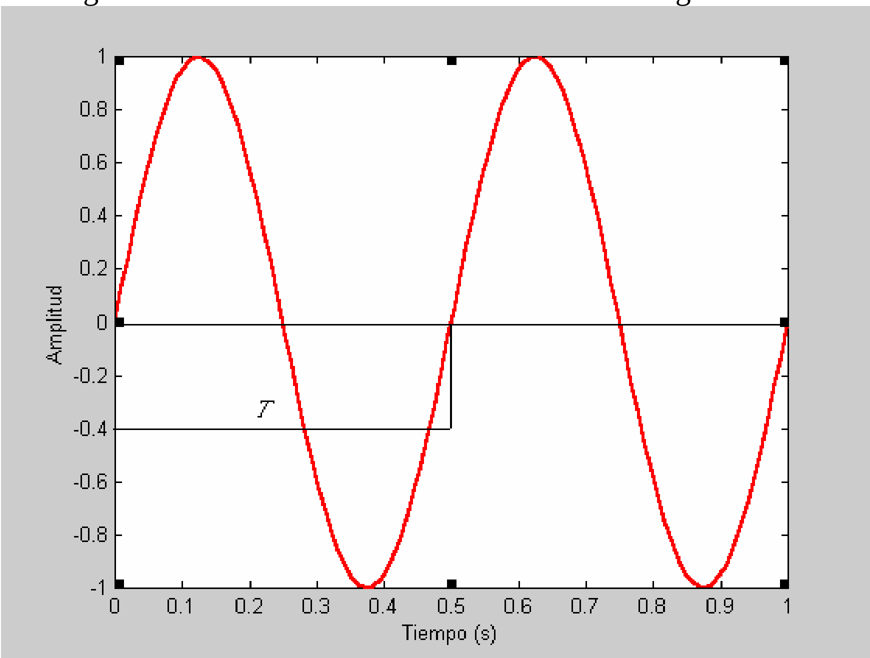


Figura 3. Una onda armónica a lo largo del tiempo en x=0

La solución repite cada *T* segundos.

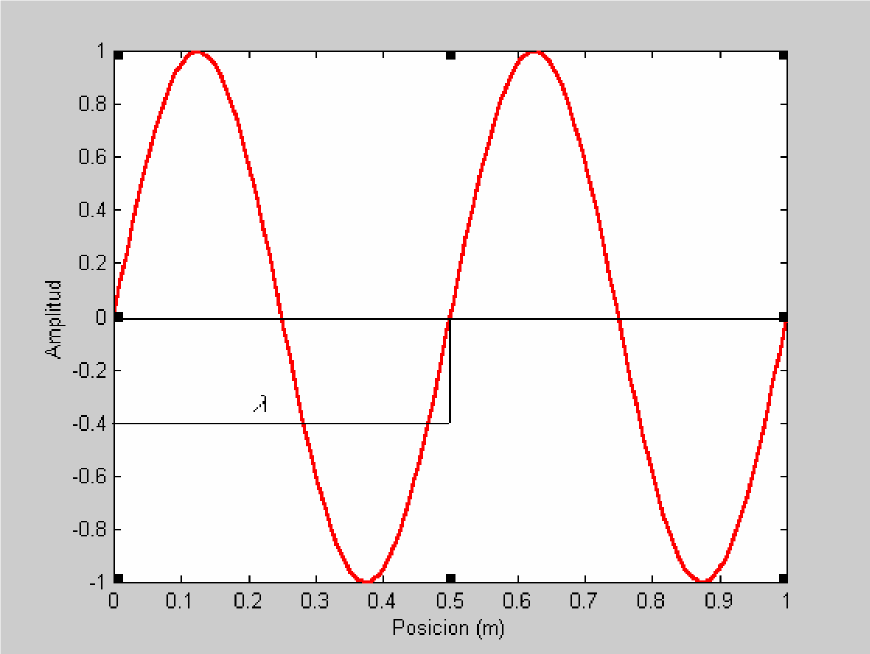


Figura 4. Una onda armónica en t=0

La solución repite cada λ metros.
El cociente λ/T es la velocidad v de la onda que también es la razón ω/k

Si volvemos a nuestras ecuaciones 24 y 25 e igualamos términos encontramos:

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (27)$$

Si reemplazamos ε_0= 8.85 .10^{-12} F/m y μ_0= 4π .10^{-7} H/m obtenemos (¡¡¡¡verificar que las unidades son de velocidad!!!!) v~2.99 10^8 m/s. Este valor es demasiado próximo a otro que deberíamos recordar de Física I y es la velocidad de la luz c. Es importante destacar que los fenómenos ópticos fueron considerados de una naturaleza autónoma hasta mediados del siglo XIX cuando el estudio que acabamos de esbozar mostró que los campos eléctricos y magnéticos respondían a la ecuación de onda. Entonces, los fenómenos ópticos dejaron de ser una rama aparte del conocimiento para pasar a ser un capítulo del electromagnetismo. Las longitudes de onda del espectro visible son del orden de 0.5 micrómetros por lo que la frecuencia es un número muy grande, del orden de 6. 10^{14} Hz, un valor que parecía imposible para ser verdadero (aunque lo es). Las ondas electromagnéticas difieren notablemente de las que aprendimos en Física I. No hay medio elástico alguno; nada se desplaza respecto de una posición de equilibrio. Durante años muchas personas buscaron infructuosamente un "soporte" para estas ondas pero fallaron. No hay necesidad de tal medio y de hecho las ondas electromagnéticas viajan el vacío. De hecho, la luz del sol viaja 150 millones de kilómetros en el vacío hasta nuestro planeta sin inconveniente alguno. Son simplemente los campos eléctricos y magnéticos que están acoplados por las ecuaciones del rotor. En 1885 Hertz tuvo el honor de ser el primero en generar, transmitir y recibir una onda de radio (de una forma primitiva pero contundente) con lo que cerró el círculo y mostró la realidad de las ondas electromagnéticas.

Vamos a ver un ejemplo simple, el de una onda plana. Tomamos un campo dirigido a lo largo del eje *y* y uniforme sobre el plano *y-z*

$$E_y(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega\, t) \tag{28}$$

Si utilizamos la ecuación del rotor de *E* obtenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{29}$$

Integramos una vez para conseguir:

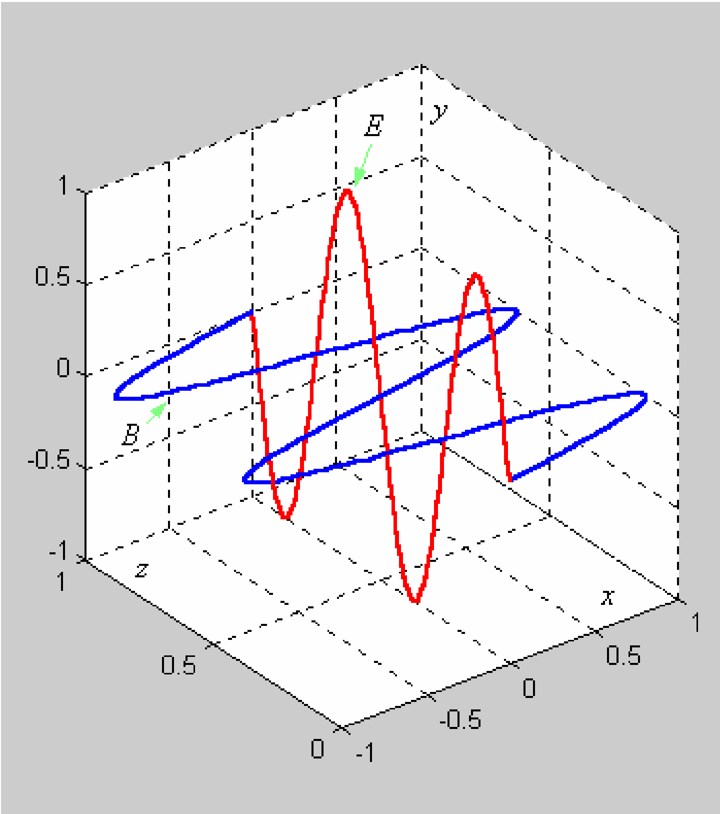
$$\begin{aligned} B_z &= -\int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt = -\int E_0 k \sin(kx - \omega t) dt \\ &= E_0 \frac{k}{\omega} \cos(kx - \omega t) = \frac{E_y}{c} \end{aligned} \tag{30}$$

Observamos que *E* y *B* siguen la misma dependencia temporal y espacial, es decir que se encuentran en fase. Los campos son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación.

$|B|=|E|/c$ (31)

En el plano *y-z* las amplitudes de los campos son uniformes. Los puntos sobre el eje *x* de igual fase son planos paralelos al *y-z*

Veamos un dibujo:



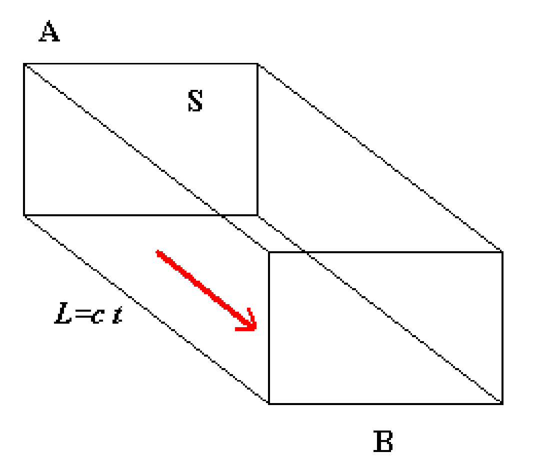
Vamos ver que la onda transporta potencia.
Comenzamos recordando los conceptos de densidad de energía de los campos eléctricos y magnéticos en el vacío:

$$u_E = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2; \quad u_B = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \qquad (32)$$

Si recordamos la relación entre los módulos de los campos (31) nos queda:

$$E = cB \Rightarrow u_E = u_B \Rightarrow u = \varepsilon_0 E^2 \qquad (33)$$

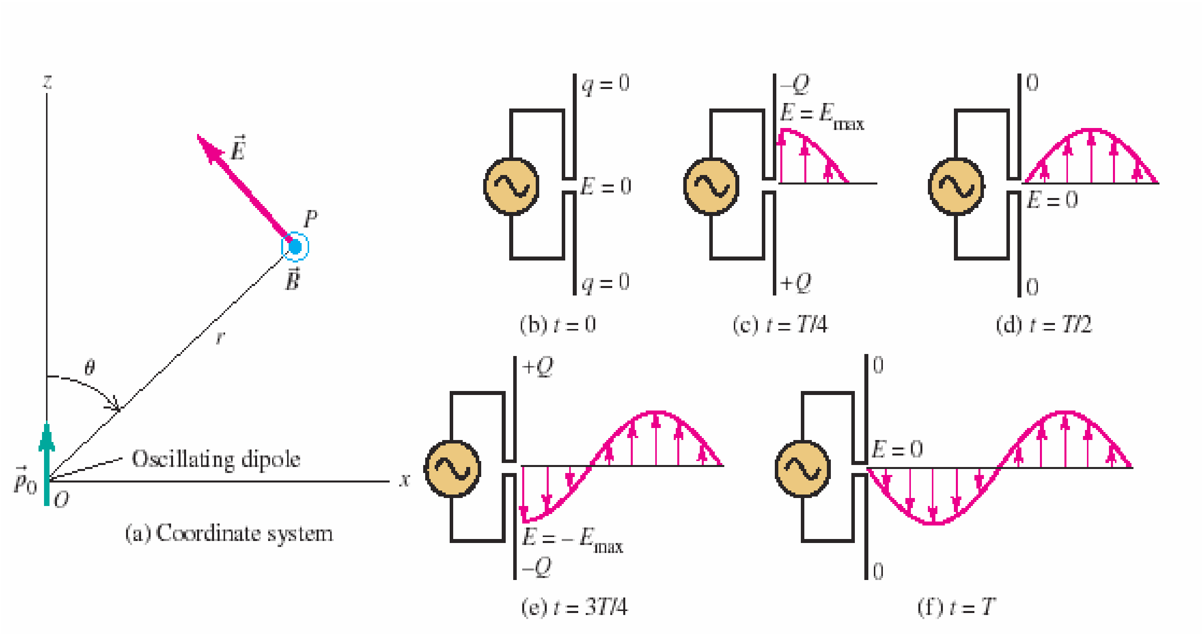
Es decir que la cantidad de energía almacenada en los campos eléctrico y magnético es la misma y entonces la cantidad total es el doble de cualquiera de ellas.
Analicemos ahora la siguiente figura:



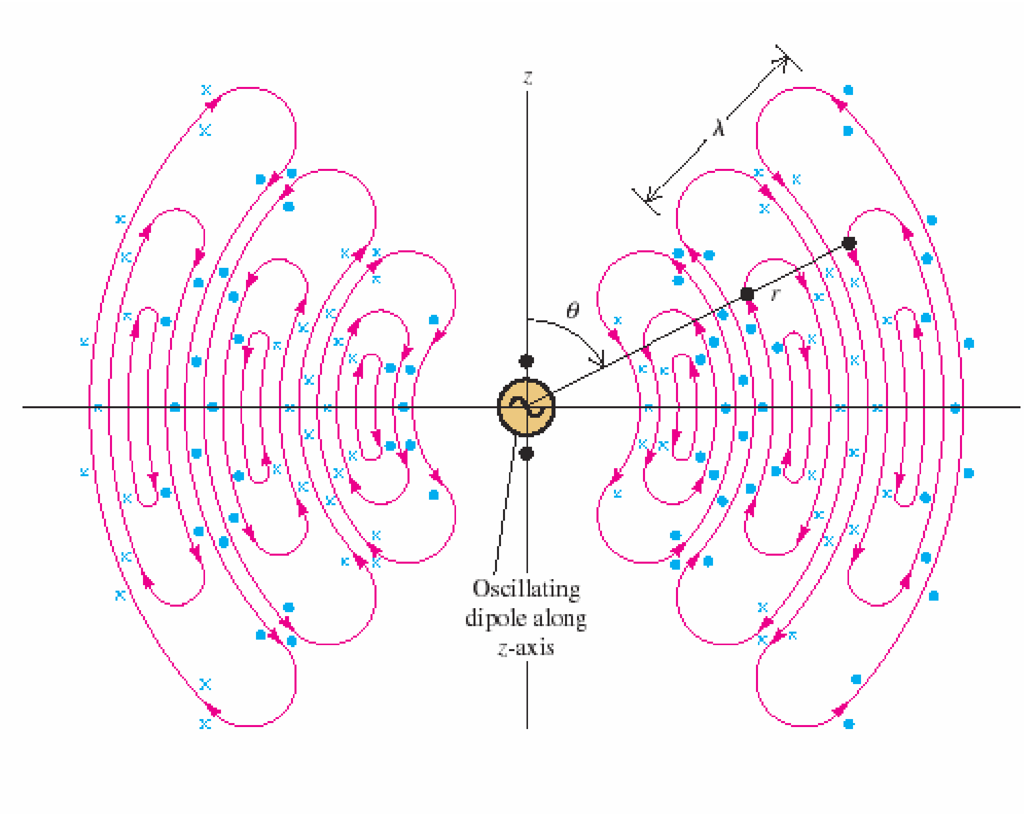
Una onda avanza en la dirección de la flecha roja. Cruza primero el plano de entrada **A** y después de un tiempo t cruza el de salida **B**(la onda avanza una distancia $L=c\,t$)**.**
Si aislamos un prisma de sección transversal S resulta que el volumen del mismo es: $S\,L=S\,c\,t$.
La cantidad total de energía U almacenada en este volumen es :

$$U=(u_E+u_B)\,(S\,c\,t)=\varepsilon_0\,E^2\,S\,c\,t \qquad (34)$$

Si dividimos la ecuación anterior por el tiempo empleado (t), obtendremos la potencia transmitida $P=\varepsilon_0\,E^2\,S\,c$. Si finalmente dividimos por el área S tenemos los que denominamos intensidad I (no confundir con corriente) y que es la potencia transmitida por unidad de área: $I=c\,\varepsilon_0\,E^2$.
Notamos entonces que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico (ver semejanza con los circuitos eléctricos).
Todo esto es muy lindo desde el punto de vista matemático, pero aún queda una duda: ¿Cómo se genera una onda?
La idea importante es la siguiente: Las cargas aceleradas son las fuentes de ondas electromagnéticas. Cualquier distribución de cargas aceleradas es razonable, algunas son mejores que otras. Una de las más utilizadas es el dipolo oscilante. (perdón por las figuras en inglés, las bajé de Internet)



En la figura anterior tenemos representada la antena más común que es el dipolo simple en la que un generador de corriente alterna está conectado a dos piezas metálicas rectilíneas. Cada una de estas piezas toma carga positiva o negativa alternativamente, generando así un dipolo eléctrico armónicamente variable. Obtenemos así un campo eléctrico variable con el tiempo el que a su vez genera un campo magnético variable y que a su vez genera otro eléctrico……
La última figura es una representación de cómo se aleja de la antena la onda transmitida mostrando las líneas de campo:



El dipolo oscilante es muy utilizado. A pesar del dominio de la televisión por cable, aún tenemos la ocasión de ver una vieja antena receptora en alguna terraza. Al observarla notaremos que a partir del soporte central emergen perpendicularmente al mismo, una serie de varas metálicas. Cada uno de estos pares de varas (a un lado y el otro del eje central) es un dipolo. Uno de ellos va conectado al cable que lleva la señal al televisor. La razón por la que hay varios dipolos en lugar de uno solo es demasiado difícil para ser comentada aquí.
El dipolo aparece también, encubiertamente, en las antenas de los autos. Es común ver un "palito que emerge del techo y el otro está dado por la carrocería del auto. Lo mismo sucede con radiograbadores que tienen una antena extensible y en teléfonos celulares donde vemos emerger un pequeño "palito" (la mayor parte de los celulares modernos tiene la antena oculta dentro de la carcaza).

Podríamos seguir con más ejemplos pero hemos hablado demasiado de este tema y es prudente terminar aquí. Ya está bien para Física II. Quienes estudien electromagnetismo tendrán que afrontar temas más difíciles.